PHYSIQUE II

Ce problème étudie différentes manières de réaliser un variomètre, instrument de mesure de la vitesse verticale d'un engin volant. Cet appareil est indispensable aux pilotes des aéronefs sans moteur (planeurs, deltaplanes et parapentes) puisqu'il leur sert à détecter les courants d'air ascendants qui permettent à ces aéronefs de se maintenir en l'air ou de gagner de l'altitude.

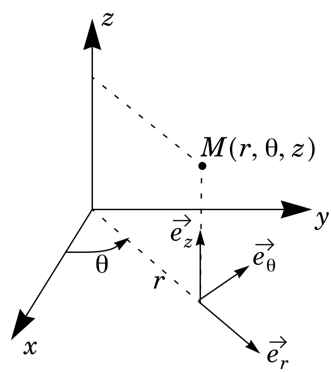
Dans tout le problème les écoulements seront supposés isothermes et les gaz parfaits. Les différentes parties de ce problème sont largement indépendantes.

Formulaire

On pourra utiliser les formules suivantes, en coordonnées cylindriques :

$U = U(r, \theta, z)$ étant un champ scalaire et

$\vec{a} = a_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + a_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + a_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$ un champ vectoriel, on a :



$$\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z \ ;$$

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \ ;$$

$$div\vec{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \ ;$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

$$(\vec{a}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{a} = \left(a_r\frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} + a_z\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{a_\theta^2}{2}\right)\vec{e}_r +$$

$$\left(a_r\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + a_z\frac{\partial a_\theta}{\partial z} + \frac{a_r a_\theta}{r}\right)\vec{e}_\theta + \left(a_r\frac{\partial a_z}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} + a_z\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\vec{e}_z$$

On donne de plus l'identité :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{a}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{a}) - \Delta\vec{a}$$

Filière PC

et la décomposition en série de Fourier d'une fonction créneau $f(t)$ impaire de période T et d'amplitude crête à crête $2E_0$:

$$f(t) = \frac{4E_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2k+1)\frac{2\pi t}{T}\right]}{(2k+1)}.$$

Partie I - Préliminaires

I.A - Étude de l'atmosphère

I.A.1) L'aéronef évolue dans une atmosphère supposée isotherme de température $T_0 = 290\ \mathrm{K}$. On considère l'axe vertical ascendant et on suppose le champ de pesanteur uniforme de norme g, soit : $\vec{g} = -g\vec{e_z}$.

Dans les conditions de l'équilibre isotherme de l'atmosphère terrestre, établir l'expression de la pression P_{atm} qui règne à l'altitude z en fonction de la pression P_0 qui règne au sol, de l'intensité g du champ de pesanteur terrestre, de la masse molaire moyenne M de l'air et de la constante R des gaz parfaits. On suppose le référentiel terrestre galiléen.

I.A.2) L'aéronef n'évolue en fait que dans une zone d'altitude restreinte au voisinage de $z_0 = 800\ \mathrm{m}$. Linéariser l'expression précédente (en posant par exemple $z = z_0(1+\varepsilon)$ avec $|\varepsilon| \ll 1$), c'est-à-dire mettre P_{atm} sous la forme

$$P_{atm} = P_A - \alpha(z - z_0).$$

Exprimer P_A et α en fonction de M, g, R, T_0, P_0 et z_0.

Calculer numériquement P_A et α avec

$$P_0 = 1,0\times 10^5\ \mathrm{Pa}\ ,\ g = 9,8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},\ R = 8,32\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}\ \text{et}\ M = 29\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}.$$

Dans la suite du problème on utilisera les valeurs approchées : $\alpha = 10\ \mathrm{Pa\cdot m^{-1}}$ et $P_A = 90\times 10^3\ \mathrm{Pa}$.

I.B - Étude de l'écoulement dans un capillaire

La plupart des variomètres utilisent un tube « capillaire » à l'intérieur duquel s'écoule l'air atmosphérique (l'appellation « capillaire » tient aux dimensions du tube, mais n'entraîne aucunement la prise en compte des effets de capillarité). On va établir ici quelques résultats utiles dans toute la suite du problème. On considère un tube cylindrique de rayon a, d'axe Oz et de longueur L à travers lequel s'écoule un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η. L'écoulement est stationnaire et incompressible. On suppose que la pression P_e à l'entrée du tube est supérieure à la pression P_s à la sortie du tube et on note ΔP la différence $P_e - P_s$. On admet que la densité volumique de forces de viscosité s'écrit $\eta\Delta\vec{v}$ et que les forces de pesanteur sont négligeables.

I.B.1) On suppose que l'écoulement est laminaire et à symétrie cylindrique ce qui conduit à chercher le champ des vitesses en coordonnées cylindriques sous la forme : $\vec{v} = v_z(r,z)\vec{e}_z$ et le champ des pressions sous la forme $P(r,z)$. Montrer que $\vec{v} = v_z(r,z)\vec{e}_z$ ne dépend en fait que de la variable r.

I.B.2)

a) En appliquant l'équation d'Euler, établir les relations :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{dv}{dr}\right] \qquad (2)$$

b) Justifier que P varie linéairement avec z.

c) On suppose que la vitesse est définie en tout point du tube. Donner la condition aux limites en $r = a$. En déduire l'expression de cette vitesse en fonction de r, a, η, ΔP et L, avec $\Delta P = P_e - P_s$.

I.B.3) Montrer que le débit volumique peut se mettre sous la forme $D_V = \beta\Delta P$ où β est une constante que l'on exprimera en fonction de a, L et η. Calculer numériquement β avec $a = 0,5\ \mathrm{mm}$, $L = 5\ \mathrm{cm}$ et $\eta = 1,85\ 10^{-5}\ \mathrm{Pl}$.

Dans toute la suite du problème on prendra $\beta = 2,7 \times 10^{-8}\ \mathrm{m^4 \cdot s \cdot kg^{-1}}$.

I.B.4) À quelle condition l'écoulement est-il effectivement laminaire ? Exprimer cette condition en fonction de a, L, η, ρ et ΔP. Quelle est la valeur maximale de ΔP qui respecte cette condition si $\rho = 1,3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$?

Partie II - Variomètre à tube capillaire

Un tel variomètre est constitué principalement d'un récipient de volume invariable $\mathcal{V}_0 = 1,0\ \mathrm{L}$ mis en communication, par un tube capillaire identique à celui du I.B, avec l'atmosphère extérieure où règne la pression P_{atm} (cf. I.A.2).

La pression à l'intérieur du récipient est notée P_{int} (voir figure 1).

II.A - Principe de fonctionnement

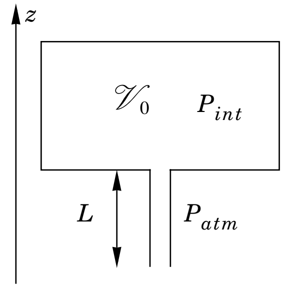


Figure 1

II.A.1) Que vaut la différence de pression $\Delta P = P_{int} - P_{atm}$ quand l'aéronef qui porte le variomètre évolue horizontalement à l'altitude z_0 ?

II.A.2) On suppose maintenant que l'aéronef possède en permanence une vitesse verticale constante $V_z = U_0$, non nulle. On admet que les écarts de pression et d'altitude restent suffisamment faibles pour que la masse volumique de l'air dans le tube puisse s'écrire

$$\rho = \frac{P_A M}{RT_0}.$$

On appelle n_{int} le nombre de moles d'air contenues dans le récipient de volume $\mathscr{V}_0$. Trouver l'équation différentielle reliant n_{int} à D_V, débit volumique sortant du récipient. Sachant que la différence de pression $\Delta P = P_{int} - P_{atm}$ est indépendante du temps, déterminer son expression en fonction de $\mathscr{V}_0$, U_0, P_A et des constantes α et β définies dans le préliminaire. Ce variomètre permet-il effectivement la mesure de V_z ?

II.B - Variomètre mécanique

Afin de mesurer la différence de pression précédente on relie le récipient de volume $\mathscr{V}_0$ à une capsule manométrique modélisée par un cylindre de très faible volume $\mathscr{V}$ (pour plus de clarté cette condition n'est pas respectée sur la figure 2). À l'intérieur du cylindre est placé un piston de masse m, de section S, mobile en translation selon l'axe des x, rappelé vers sa position d'équilibre ($x = 0$, en l'absence de force de pression) par un ressort de constante de raideur k. Le piston est soumis à une force de frottement de type fluide $-h(dx/dt)\vec{e}_x$ et est relié à une aiguille qui se déplace devant un cadran gradué sur lequel on peut lire la vitesse verticale.

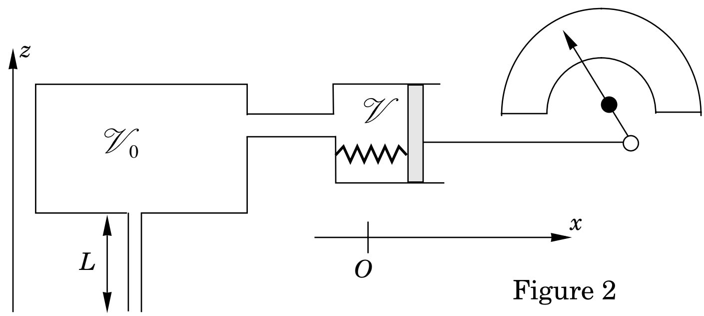


Figure 2

II.B.1) Donner l'équation différentielle reliant la pression P_{int} à l'altitude $z(t)$.

On admettra que les résultats du I.B restent valables même si le régime n'est plus stationnaire.

II.B.2) Dans le cas où l'aéronef, un planeur en vol horizontal à $z = z_0$ pour $t < 0$, pénètre à l'instant $t = 0$ dans un courant ascendant qui lui communique une vitesse verticale $V_z = U_0$ constante, montrer que la pression P_{int} est liée à l'altitude $z(t)$ par la relation :

$$\frac{dP_{int}}{dt} + \frac{1}{\tau}P_{int} = \frac{1}{\tau}[P_A - \alpha(z(t) - z_0)].$$

Déterminer la constante de temps τ en fonction de $\mathscr{V}_0$, P_A et β. Exprimer $P_{int}(t)$. Donner la valeur numérique de τ et conclure.

II.B.3)

a) Écrire l'équation différentielle reliant le déplacement $x(t)$ du piston à la différence de pression $P_{int} - P_{atm}$.

b) Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit $x(t)$ quand l'évolution du planeur est celle décrite au II.B.2.

II.B.4) Une solution particulière de cette équation différentielle est :

$$x_{part}(t) = 4S\alpha U_0\tau\left(\frac{m - h\tau + k\tau^2(1 - e^{-t/\tau})}{(2k\tau - h)^2 - (h^2 - 4mk)}\right).$$

a) En déduire l'expression de $x(t)$ à deux constantes près quand l'évolution du planeur est celle du II.B.2, si on suppose dans un premier temps que $h^2 - 4mk < 0$.

b) Quelles sont les relations qui permettent de calculer ces constantes ?

c) Donner l'allure de la courbe $x(t)$ ainsi que la valeur numérique de la limite de $x(t)$ quand t tend vers l'infini si $m = 1,0\ \mathrm{g}$, $S = 2,0\ \mathrm{cm}^2$, $h = 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot m^{-1} \cdot s}$ $k = 1,0\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et $U_0 = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

d) Est-il légitime de supposer le volume du variomètre constant ?

II.B.5) Le choix de $h^2 - 4mk < 0$ est-il judicieux ? Quelle valeur de $h^2 - 4mk$ serait-il préférable d'adopter ?

Pour obtenir cette valeur, on choisit tout d'abord de ne modifier que la masse m.
Calculer la valeur m_c qui satisfait la condition. Commenter.
Reprendre cette étude en ne modifiant que la constante de raideur k. La nouvelle valeur k_c est-elle acceptable ?
Terminer en étudiant une modification du coefficient de frottement h.
Sur quel paramètre vaut-il mieux agir pour obtenir le résultat souhaité ? Quelle serait alors l'allure de la courbe $x(t)$?

II.B.6) Afin de tester le variomètre on le soumet, en laboratoire, à une pression extérieure variant sinusoïdalement autour de P_A selon $P_{atm} = P_A + A_0 \cos\omega t$, simulant une oscillation sinusoïdale de pulsation ω de l'altitude de l'aéronef au voisinage de l'altitude z_0 soit $z = z_0 + \xi_0 \cos\omega t$. On pose $\xi = z - z_0 = \xi_0 \cos\omega t$ et on associe à $x(t)$ et à $\xi(t)$ les variables complexes $\underline{x}(t) = x_0(\omega) e^{j\omega t} e^{j\varphi(\omega)}$ et $\underline{\xi}(t) = \xi_0 e^{j\omega t}$.

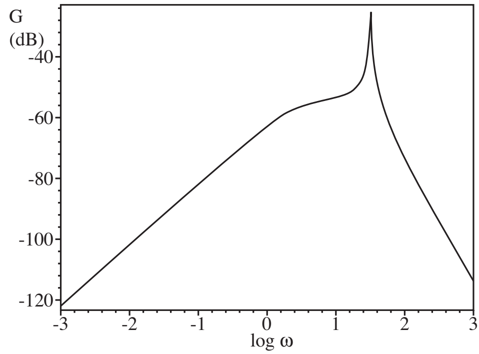


Figure 3a

On définit la fonction de transfert harmonique

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{x}(t)}{\underline{\xi}(t)}.$$

a) Calculer cette fonction de transfert et la mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega\tau_0}{1 + j\omega\tau_1 - \omega^2\tau_2^2 - j\omega^3\tau_3^3}$$

où τ_0, τ_1, τ_2 et τ_3 sont des constantes réelles que l'on exprimera en fonction de α, β, $\mathscr{V}_0$, S, h, k, m et P_A.

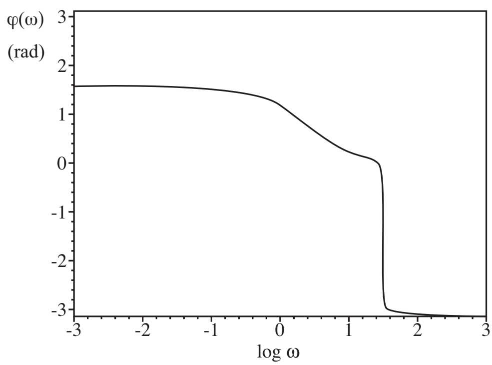


Figure 3b

b) La courbe de gain $G = 20 \log|\underline{H}(j\omega)|$ et la courbe de phase $\varphi(\omega)$ du diagramme de Bode sont représentées ci-contre, avec les valeurs numériques du II.B.4. Commenter. En déduire dans quel domaine de fréquence il faut opérer pour que le variomètre fonctionne correctement. Que peut-on en penser ?

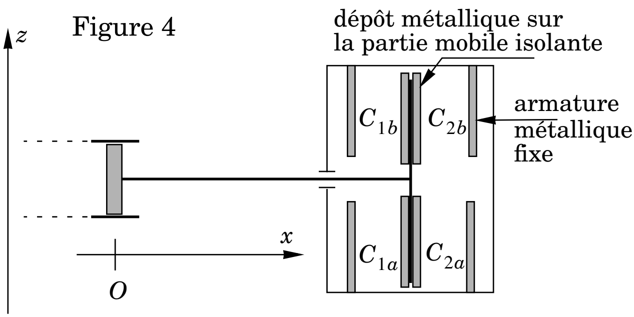
Partie III - Variomètre à affichage électronique

Cette technologie est généralement utilisée pour des variomètres de faible taille où les déplacements du piston sont plus réduits que dans la partie II. Les déplacements x du piston sont transmis à un système de condensateurs différentiels.

Ces condensateurs permettent, à l'aide d'une électronique adaptée, de déterminer le déplacement x du piston qui, sous certaines conditions est une image de la vitesse verticale V_z de l'aéronef. On supposera dans toute cette partie que ces conditions sont vérifiées. On a donc $x = \lambda V_z$ où λ est une constante positive. Le capteur à capacités différentielles comporte quatre condensateurs C_{1a}, C_{1b}, C_{2a} et C_{2b} assimilables à des condensateurs plans. On négligera les effets de bord.

Au repos, défini par la position $x = 0$, les armatures des condensateurs sont toutes distantes de e_0. Elles ont une surface en regard S et baignent dans un liquide diélectrique de permittivité ε. Dans toute cette partie, on supposera $x \ll e_0$.

Figure 4



On rappelle que, si l'on néglige les effets de bord, la capacité d'un condensateur plan est donnée par $C = \varepsilon S/e$, où S est la surface des armatures en regard et e la distance séparant ces armatures.

III.A - Étude du système de capacités différentielles

III.A.1) En négligeant les effets de bord, déterminer les expressions des capacités variables : C_{1a}, C_{1b}, C_{2a} et C_{2b} en fonction de ε, S, e_0 et x.

III.A.2) *Application numérique* :
$\varepsilon = 1,6\times10^{-8}\,\mathrm{SI}$, $S = 9\ \mathrm{cm}^2$, $e_0 = 3\ \mathrm{mm}$.

Déterminer la valeur commune des capacités lorsque $x = 0$.

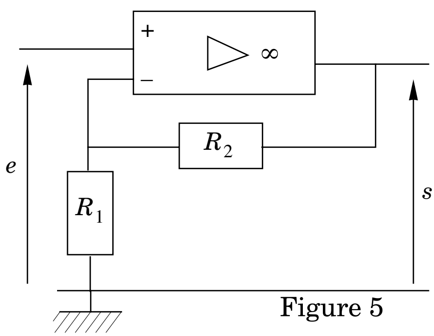


Figure 5

III.B - Oscillateur à pont de Wien

Dans toute cette partie, on supposera les amplificateurs opérationnels (AO) idéaux, fonctionnant en régime linéaire.

III.B.1) On considère le quadripôle figure 5.

a) Préciser le modèle de l'amplificateur idéal en régime linéaire. Déterminer la fonction de transfert $\underline{F} = \underline{S}/\underline{E}$ en fonction de R_1 et R_2 quand l' AO fonctionne en régime linéaire. Préciser les limitations pratiques que l'on peut rencontrer.

b) Tracer la caractéristique $s(e)$, c'est-à-dire le graphe représentant s en ordonnée en fonction de e en abscisse.

III.B.2) Étude du filtre de Wien ci-contre (figure 6).

a) Déterminer la fonction de transfert

$$\underline{G} = \frac{\underline{S'}}{\underline{E'}}.$$

Préciser les paramètres caractéristiques du filtre (gain maximum, facteur de qualité, pulsation particulière).

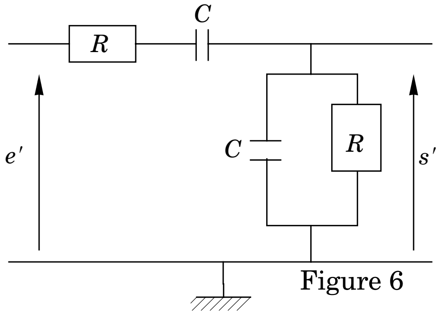


Figure 6

b) Tracer le diagramme de Bode (gain et phase) associé à $\underline{G}$. On fera apparaître sur chacun des graphes le tracé asymptotique et le tracé réel. Quelle est la fonction de ce quadripôle ?

III.B.3)

a) On couple le filtre de Wien avec le montage amplificateur du III.B.1 figure 5. On ne tient aucun compte de la réponse fréquentielle de l'amplificateur et on suppose le régime linéaire toujours établi. À partir des expressions $\underline{F}$ et $\underline{G}$, montrer qu'il peut théoriquement exister un signal sinusoïdal sans générateur basse fréquence pour une valeur $r = R_2/R_1$ et une fréquence particulière f à déterminer.

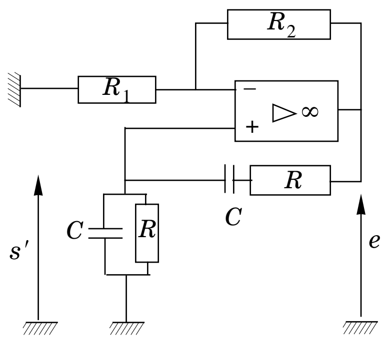


Figure 7

b) En utilisant la relation imposée par l'amplificateur et l'équation différentielle du filtre de Wien, établir l'équation différentielle vérifiée par s'. Montrer qu'il peut exister un signal sinusoïdal sans générateur B.F. Retrouver les conditions du III.B.3-a. Calculer numériquement f si $R = 10\ \mathrm{k\Omega}$ et $C = 4,8\ \mathrm{nF}$. Peut-on légitimement ignorer la réponse fréquentielle de l'AO ?

c) En pratique, on ne sait pas réaliser exactement la condition $r = R_2/R_1$. À partir de l'équation différentielle précédente, montrer qu'une condition d'apparition des oscillations est $r = R_2/R_1 > n$ (n entier à définir). Si on choisit $R_2 = 10\ \mathrm{k\Omega}$, les valeurs disponibles dans les catalogues étant $4,7\ \mathrm{k\Omega}$, $5,6\ \mathrm{k\Omega}$, $10\ \mathrm{k\Omega}$, quelle valeur doit-on prendre pour R_1 ?

d) Si l'on fait varier la valeur de R_1 à l'aide d'un potentiomètre on constate que le signal de sortie évolue entre une sinusoïdale légèrement écrêtée et un signal carré. En déduire un encadrement de l'amplitude maximale du signal $e'(t)$ en ne gardant que le terme fondamental du développement en série de Fourier. On justifiera cette approximation. Faire l'application numérique si la tension de saturation de l' AO vaut $13\ \mathrm{V}$.

III.B.4) *Amélioration du montage*. On donne la caractéristique d'une diode Zener idéale (voir figure 8 ci-contre).

Pour améliorer le comportement du montage, on remplace la résistance R_2 par le dipôle AB suivant, qui comporte deux résistances R_2 et R_3 deux diodes Zener tête bêche.

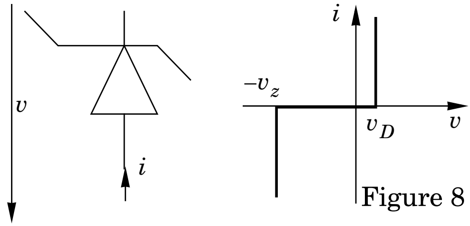


Figure 8

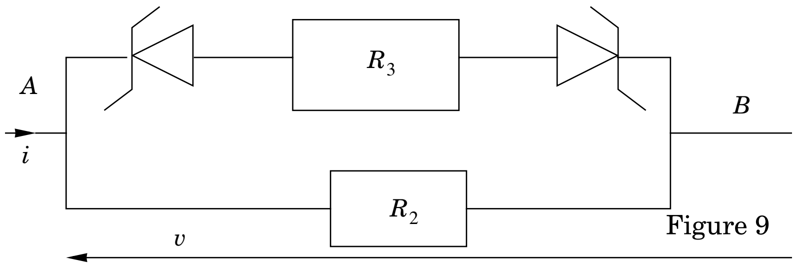


Figure 9

a) Tracer la caractéristique $v(i)$ du dipôle AB, c'est-à-dire le graphe représentant la tension v en ordonnée en fonction du courant i en abscisse. Préciser en fonction de R_2, R_3, V_D et V_Z les différentes pentes et les coordonnées des points particuliers de cette caractéristique.

b) En quoi l'introduction du dipôle AB améliore la qualité de l'oscillateur ?

III.C - Étude globale du capteur

Le capteur complet se compose du système de condensateurs C_{1a} et C_{1b}, de capacité C_1 et du système de condensateurs C_{2a} et C_{2b} de capacité C_2. Ces condensateurs sont utilisés dans deux oscillateurs sinusoïdaux à pont de Wien qui oscillent respectivement aux pulsations $\omega_1 = 1/RC_1$ et $\omega_2 = 1/RC_2$. Soit $v_1(t) = A\cos(\omega_1 t)$ le signal issu du premier oscillateur et $v_2(t) = A\cos(\omega_2 t)$ le signal issu du second oscillateur. Ces signaux sont traités par un montage électronique comportant un multiplieur qui fournit la tension $v_m(t) = k_m v_1(t) v_2(t)$ et une cellule de filtrage $R'C'$, avec k_m une constante multiplicative. La tension $v_{C'}$ aux bornes du condensateur de la cellule $R'C'$ est alors analysée par un fréquencemètre qui délivre une tension continue V_S proportionnelle à la fréquence f de $v_{C'}$. On posera $V_S = \gamma f$.

Comment faut-il choisir le produit $\tau' = R'C'$ pour obtenir une tension V_S proportionnelle à x ?