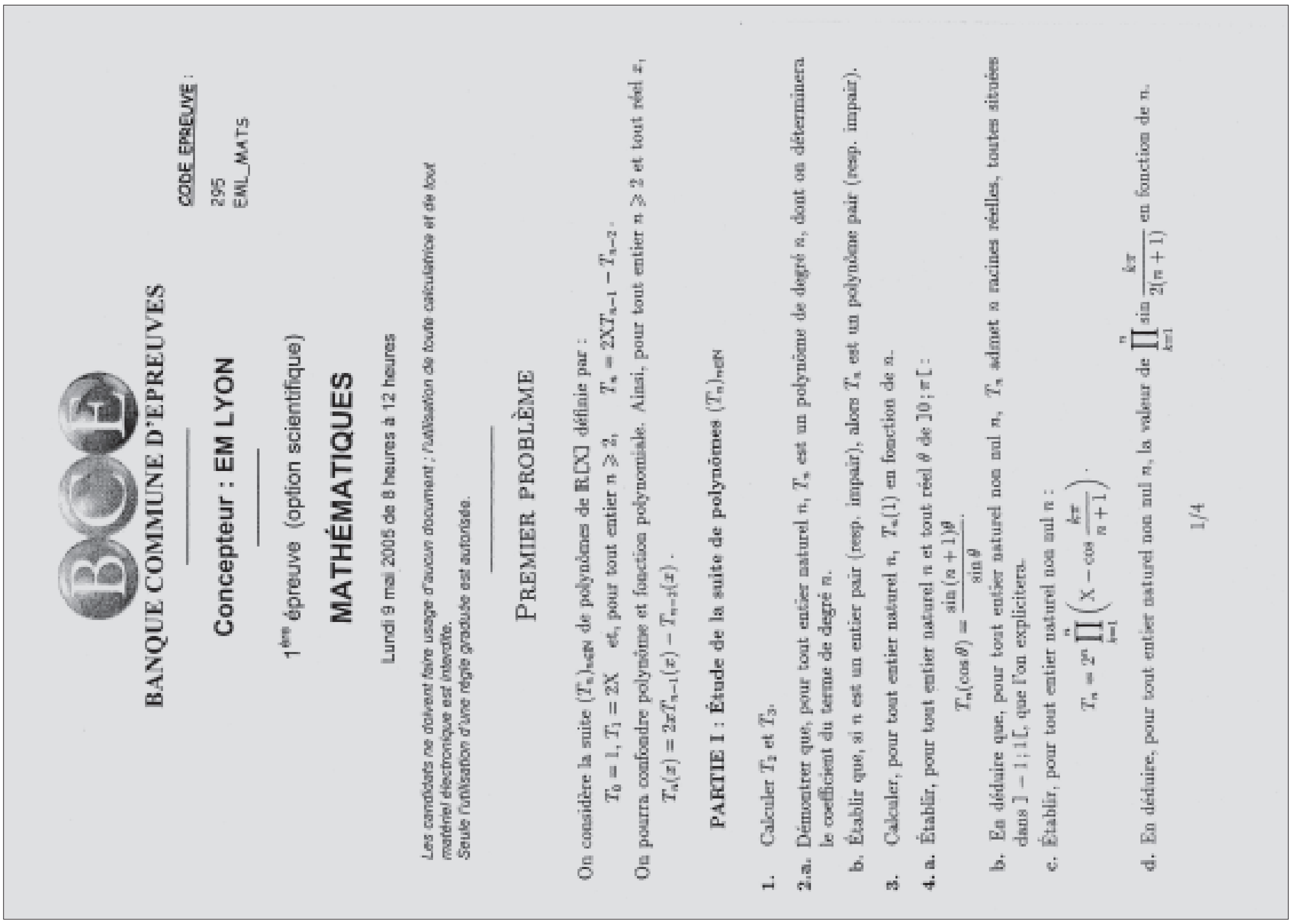
Mathématiques voies S et E

Corrigés des épreuves de mathématiques sp (voie S et voie E)

François Delaplace (voie E), **Pierre Girard** (voie S)
Professeurs de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Notre-Dame du

Voie scientifique



BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :
295
EML_MATS

Concepteur : EM LYON

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 9 mai 2005 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel x,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

PARTIE I : Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Calculer T_2 et T_3.

2.a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n, dont on déterminera le coefficient du terme de degré n.

b. Établir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).

3. Calculer, pour tout entier naturel n, $T_n(1)$ en fonction de n.

4. a. Établir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0;\pi[$:

$$T_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $]-1;1[$, que l'on explicitera.

c. Établir, pour tout entier naturel non nul n :

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

d. En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n.

1/4

5. a. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0\,;\pi[$:

$$\sin^2\theta\, T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + (n^2+2n)\, T_n(\cos\theta) = 0\ .$$

Indication: On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) :

$$\theta \longmapsto \sin\theta\, T_n(\cos\theta) - \sin(n+1)\theta\ .$$

b. En déduire, pour tout entier naturel n :

$$(\mathrm{X}^2-1)\, T_n'' + 3\,\mathrm{X}\, T_n' - (n^2+2n)\, T_n = 0\ .$$

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel fixé tel que $n \geqslant 2$, et on note E l'espace vectoriel réel des polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré inférieur ou égal à n.
On note L l'application qui, à un polynôme P de E, associe le polynôme $L(P)$ défini par :

$$L(P) = (\mathrm{X}^2-1)P'' + 3\mathrm{X}P'\ .$$

PARTIE II : Étude de l'endomorphisme L

1. Montrer que L est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

2. a. Calculer $L(T_k)$ pour tout k de $\{0,1,\ldots,n\}$.

b. En déduire les valeurs propres de L et, pour chaque valeur propre de L, une base et la dimension du sous-espace propre associé.

PARTIE III : Étude d'un produit scalaire

Dans la suite du problème, on note φ l'application qui, à un couple (P,Q) de polynômes de E, associe le réel $\varphi(P,Q)$ défini par :

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, P(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x\ .$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. Démontrer, pour tous polynômes P, Q de E :

$$\varphi\big(L(P),Q\big) = \varphi\big(P, L(Q)\big)\ .$$

Indication: On pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\varphi\big(L(P),Q\big) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\, P'(x)\, Q'(x)\, \mathrm{d}x\ .$$

3. Établir que $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale de E.

2/4

Deuxième problème

PARTIE I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.

2. Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in]0;\pi]$:

$$\frac{1-e^{imt}}{1-e^{it}}e^{it} = \frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,e^{\frac{i(m+1)t}{2}} \quad , \text{ puis } \sum_{n=1}^{m}\cos(nt) = \frac{\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

3. Soit $u : [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $\displaystyle\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Soit l'application $f : [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\frac{t}{2}}$ si $t \in]0;\pi]$, et $f(0) = -1$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$.

5.a. Montrer : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,\mathrm{d}t$.

b. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ et montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1.a. Montrer que, pour tout couple $(x,y) \in \left([0;+\infty[\right)^2$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

b. Montrer que, pour tout $x \in [0;+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

On note S l'application définie, pour tout x de $[0;+\infty[$, par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3/4

3.a. Établir : $\forall (x,y) \in \left([0;+\infty[\right)^2$, $\displaystyle S(y) - S(x) = (y-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

b. En déduire : $\forall (x,y) \in \left([0;+\infty[\right)^2$, $|S(y) - S(x)| \leqslant \dfrac{\pi^2}{6}|y-x|$.

c. Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0;+\infty[$.

4.a. Montrer, pour tout couple (x,y) de $\left([0;+\infty[\right)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right| \leqslant |y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

b. En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0;+\infty[,\quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.$$

c. Préciser les valeurs de $S'(0)$ et de $S'(1)$.

5. On admet que S est deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0;+\infty[,\quad S''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n+x)^3}.$$

Montrer que S est concave.

6. Soit $x \in]0;+\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$\forall t \in [1;+\infty[,\quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\varphi(n+1) \leqslant \int_n^{n+1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(n)$,

et en déduire : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

c. Conclure : $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$.

7.a. Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$.

b. Tracer l'allure de la courbe représentative de S.

4/4

Premier problème

I- Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. En appliquant la définition de la suite : $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X(2X) - 1 = \underline{4X^2 - 1}$ et $T_3 = 2X(\underbrace{4X^2-1}_{T_2}) - \underbrace{2X}_{T_1} = \underline{8X^3 - 4X}$

2. a. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition :
$\mathcal{P}(n) =$ "Le monôme de plus haut degré de T_n est $2^n X^n$"
La proposition est clairement vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ puisque $T_0 = 1 = 2^0X^0$ et $T_1 = 2X = 2^1X^1$. Soit n un entier naturel quelconque $\geqslant 1$ et fixé ; Supposons que la proposition $\mathcal{P}(k)$ soit vraie pour tout entier naturel $k \leqslant n$; Ce qui signifie que pour tout $k \leqslant n$, il existe un polynôme U_k de degré strictement inférieur à k tel que $T_k = 2^kX^k + U_k$. Et puisque $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies, on a $T_{n+1} = 2X\underbrace{(2^nX^n + U_n)}_{T_n} - \underbrace{(2^{n-1}X^{n-1} + U_{n-1})}_{T_{n-1}}$
c'est à dire : $T_{n+1} = 2^{n+1}X^{n+1} + \left(2XU_n - 2^{n-1}X^{n-1} - U_{n-1}\right)$.
Posons alors $U_{n+1} = 2XU_n - 2^{n-1}X^{n-1} - U_{n-1}$: On a
$deg(U_{n+1}) \leqslant max\left(deg(2XU_n), deg(2^{n-1}X^{n-1}), deg(U_{n-1})\right) < max\,(1 + (n-1), n-1, n-1)$
donc $deg(U_{n+1}) < n$ et $T_{n+1} = 2^{n+1} + U_{n+1}$. Ce qui prouve que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence forte, on en déduit que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ deg(T_n) = n \text{ et son coefficient de degré } n \text{ est } 2^n} \qquad (1)$$

b. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition : $\mathcal{Q}(n) =$"$T_n(-X) = (-1)^nT_n(X)$". La proposition est clairement vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ puisque $T_0 = 1$ et $T_1 = 2X$. Soit n un entier naturel quelconque $\geqslant 1$ et fixé ; Supposons que la proposition $\mathcal{Q}(k)$ soit vraie pour tout entier naturel $k \leqslant n$; On a alors :
$$\begin{aligned} T_{n+1}(-X) &= 2(-X)T_n(-X) - T_{n-1}(-X) \\ &= (-1)^{n+1}2XT_n(X) - (-1)^{n-1}T_{n-1}(X) \\ &= (-1)^{n+1}\left[2XT_n(X) - T_{n-1}(X)\right] \\ &= (-1)^{n+1}T_{n+1}(X) \end{aligned}$$
Ce qui prouve que la proposition $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence forte, on en déduit que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(-X) = (-1)^nT_n(X)} \qquad (2)$$
Conclusion : $\boxed{\text{Si } n \text{ est pair alors } T_n \text{ est pair et si } n \text{ est impair alors } T_n \text{ est impair}}$.

3. On peut faire quelques essais et s'apercevoir que, pour n =0, 1, 2 et 3, $T_n(1) = n + 1$. Montrons-le par récurrence : Soit $\mathcal{R}(n) =$"$T_n(1) = n$". La proposition est clairement vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ puisque $T_0(1) = 1$ et $T_1(1) = 2.1 = 2$.
Soit n un entier naturel quelconque ≥ 1 et fixé ; Supposons que la proposition $\mathcal{R}(k)$ soit vraie pour tout entier naturel $k \leqslant n$; On a alors :
$$T_{n+1}(1) = 2.1T_n(1) - T_{n-1}(1) = 2(n+1) - n = n + 2$$
Ce qui prouve que la proposition $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence forte, on en déduit que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(1) = n + 1} \qquad (3)$$

4. a. On pourrait facilement raisonner par récurrence mais pour changer, utilisons une méthode qui nous fera réviser une autre partie du programme. Posons, pour tout entier naturel : $u_n = T_n(\cos\theta)$; on définirait ainsi une suite numérique récurrente linéaire d'ordre 2 telle que :
$$\begin{cases} u_0 = T_0(\cos\theta) = 1, \\ u_1 = T_1(\cos\theta) = 2\cos\theta, \\ \forall n \geqslant 2,\ u_n = 2\cos\theta u_{n-1} - u_{n-2} \end{cases}$$
L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est :
$$Z^2 - 2\cos\theta Z + 1 = 0$$
son discriminant est $\Delta = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta < 0$ car $\theta \in]0;\pi[$. Ses racines sont donc : $Z_1 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et $Z_2 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$ (puisque $\theta \in]0;\pi[$, $\sqrt{\sin^2\theta} = |\sin\theta| = \sin\theta$).
Il existe donc deux constantes réelles A et B telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A\cos n\theta + B\sin n\theta$.
On trouve A et B en résolvant le système :
$$\begin{cases} u_0 = 1 = A \\ u_1 = 2\cos\theta = A\cos\theta + B\sin\theta \end{cases}$$
Ce qui donne immédiatement : $A = 1$ et $B = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ (On rappelle que $\sin\theta \neq 0$ car $\theta \in]0;\pi[$)
Finalement :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos n\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin n\theta = \frac{\cos n\theta\sin\theta + \sin n\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$
En conclusion :
$$\boxed{T_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}} \qquad (4)$$

b. Soit $n \geqslant 1$; Pour tout réel $\theta_k = k.\dfrac{\pi}{n+1}$ (avec $1 \leqslant k \leqslant n$) on a $\theta_k \in]0;\pi[$ et $\sin(n+1)\theta_k = \sin k\pi = 0$ donc,d'après la question précédente, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ $T_n\left[\cos\theta_k\right] = 0$.
$\cos\theta_1, \ldots, \cos\theta_n$ sont donc n racines réelles de T_n. Elles sont distinctes car la fonction cos est strictement décroissante sur $]0;\pi[$. T_n étant de degré n d'après la question 2°)a), On en déduit que l'on a là toutes les racines de T_n.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \text{ a } n \text{ racines : } \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right), \ldots, \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)}$

c. Pour tout entier $n \geqslant 1$, T_n est de degré n, de coefficient dominant 2^n et de racines $\cos\left(\frac{\theta}{n+1}\right), \ldots, \cos\left(\frac{n\theta}{n+1}\right)$, donc, d'après le théorème de factorisation des polynômes :

$$\boxed{T_n = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)}$$

d. En particulier, pour $X = 1$, $T_n(1) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \underbrace{(1-\cos\frac{k\pi}{n+1})}_{2\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}}$, d'où, compte tenu de (3) :

$n+1 = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(2\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$,d'où : $\prod_{k=1}^{n}\left(\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{n+1}{4^n}$ c'est à dire :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = \sqrt{\frac{n+1}{4^n}}}$$

5. a. Comme indiqué dans l'énoncé, utilisons la fonction $g : \theta \mapsto \sin\theta\, T_n(\cos\theta) - \sin(n+1)\theta$. Cette fonction est bien la fonction nulle d'après (4) elle est donc deux fois dérivable sur $]0;\pi[$ avec, successivement :
$g'(\theta) = \cos\theta\, T_n(\theta) - \sin^2\theta\, T_n'(\theta) - (n+1)\cos(n+1)\theta$

$$\underbrace{g"(\theta)}_{0} = -\sin\theta T_n(\cos\theta) - \sin\theta\cos\theta T_n'(\cos\theta) - 2\sin\theta\cos\theta T_n'(\cos\theta) + \ldots$$

$$\ldots + \sin^3\theta T_n''(\cos\theta) + (n+1)^2 \underbrace{\sin(n+1)\theta}_{\sin\theta . T_n(\cos\theta)}$$

C'est à dire :
$\underbrace{g"(\theta)}_{0} = -\sin\theta\left[T_n(\cos\theta) + 3\cos\theta T_n'(\cos\theta) - \sin^2\theta T_n''(\cos\theta) - (n+1)^2 T_n(\cos\theta)\right]$
En simplifiant par le réel non nul $(-\sin\theta)$, on en déduit que, pour tout θ de $]0;\pi[$,

$$T_n(\cos\theta) + 3\cos\theta T_n'(\cos\theta) - \sin^2\theta T_n''(\cos\theta) - (n+1)^2 T_n(\cos\theta) = 0$$

c'est à dire :

$$\sin^2\theta T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta T_n'(\cos\theta) + (n^2+2n)T_n(\cos\theta) = 0$$

b. On en déduit que, pour tout u de $]-1;1[$, puisque $\cos\theta$ décrit $]-1;1[$ lorsque θ décrit $]0;\pi[$,

$$(1-u^2)T_n''(u) - 3uT_n'(u) + (n^2+2n)T_n(u) = 0$$

D'où enfin :

$$\forall u \in]-1;1[,\ (u^2-1)T_n''(u) + 3uT_n'(u) - (n^2+2n)T_n(u) = 0$$

Le polynôme $(X^2-1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)T_n$ a donc une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.
Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)T_n = 0}$$

II- 1. On note déjà que si P est un élément de E alors P' et P'' sont des éléments de E donc $L(P)$ est aussi un élément de E. Deplus, si P et Q sont des éléments de E et si k est un réel alors

$$\begin{aligned} L(kP+Q) &= (X^2-1)(kP''+Q'') + 3X(kP'+Q') \\ &= k\left[(X^2-1)P'' + 3XP'\right] + (X^2-1)Q'' + 3XQ' \\ &= kL(P) + L(Q) \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que $\underline{L \text{ est un endomorphisme de } E}$

2. a. Pour tout k de $\{0,1,\ldots,n\}$, $L(T_k) = (X^2-1)T_k'' + 3XT_k'$ donc, d'après I-5-b,

$$\boxed{L(T_k) = (k^2+2k)T_k}$$

b. Aucun des polynômes T_k n'étant nuls, on en déduit que $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}$ T_k est un vecteur propre de L associé à la valeur propre k^2+2k.
Les nombres k^2+2k étant tous distincts lorsque k décrit $\{0,1,\ldots,n\}$ (par exemple parce que l'application $t \mapsto t^2+2t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$), on en déduit que L a $(n+1)$ valeurs propres distinctes et puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n+1$, il est donc diagonalisable ; le sous-espace propre associé à la valeur propre k^2+2k étant $vect\{T_k\}$ (donc de dimension 1).

III- 1. Soient P, Q et R trois éléments de E et k un réel. D'une part $\varphi(P,Q)$ est bien un réel (Il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur $[-1;1]$), d'autre part

$$\begin{aligned} \varphi(kP+Q,R) &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}(kP(x)+Q(x))R(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}(kP(x)R(x)+Q(x)R(x))\,dx \\ &= k\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P(x)R(x)\,dx + \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}Q(x)R(x)\,dx \\ &= k\varphi(P,R) + \varphi(Q,R) \end{aligned}$$

et $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P(x)Q(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}Q(x)P(x)\,dx = \varphi(Q,P)$

$\underline{\varphi \text{ est donc une forme bilinéaire symétrique sur } E}$ et $\underline{\varphi(P,P)} = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P^2(x)\,dx \underline{\geqslant 0}$ car c'est l'intégrale d'une fonction positive et continue sur $[-1;1]$. Enfin, si $\varphi(P,P) = 0$ alors $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P^2(x)\,dx = 0$ or l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment n'est nulle que si cette fonction est nulle sur ce segment ; ce qui signifie ici que $\forall x \in [-1;1]$ $\sqrt{1-x^2}P^2(x) = 0$ donc $\forall x \in]-1;1[$ $P^2(x) = 0$ donc P est nul sur $]-1;1[$, il a donc une infinité de racine : c'est donc le polynôme nul. Conclusion : $\underline{(\varphi(P,P)=0) \Rightarrow (P=0)}$
Tous ces résultats nous démontrent bien que

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

2. Par intégration par parties :
$u : x \mapsto u(x) = -(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)$ et Q sont de classe C^1 sur $[-1;1]$,
$u'(x) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P'(x) - (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P''(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}[3xP'(x) - (1-x^2)P''(x)]$

$$\begin{aligned}
\varphi(L(P),Q) &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}[L(P)](x)Q(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}[(x^2-1)P''(x) + 3xP'(x)]Q(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}[-(1-x^2)P''(x) + 3xP'(x)]Q(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} u'(x)Q(x)\,dx \\
&= u(1)Q(1) - u(-1)Q(-1) - \int_{-1}^{1} u(x)Q'(x)\,dx \\
&= -\int_{-1}^{1} -(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x)\,dx
\end{aligned}$$

C'est à dire :

$$\boxed{\varphi(L(P),Q) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x)\,dx}$$

Par le même calcul et en échangeant les rôles de P et Q, on trouverait : $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}Q'(x)P'(x)\,dx = \varphi(L(Q),P)$; on a donc bien :

$$\boxed{\varphi(L(P),Q) = \varphi(P,L(Q))}$$

3. L est donc un endomorphisme symétrique de E. On sait alors que des vecteurs propres de L associés à des valeurs propres distinctes formeront toujours une famille libre orthogonale ; c'est le cas de $\{T_0,\dots,T_n\}$ qui est donc une famille libre et orthogonale ; puisqu'elle contient $n+1$ éléments de E qui est de dimension $n+1$, on en conclut que

$$\boxed{\{T_0,\dots,T_n\} \text{ est une base orthogonale de } E}$$

Deuxième problème

I- 1. La fonction à intégrer est clairement continue sur $[0;\pi]$, on effectue alors une intégration par parties en posant $u(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $v(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$, on définit des fonctions de classe C^1 sur $[0;\pi]$ et :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\,dt &= \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(\frac{1}{n}\sin(nt)\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)\,dt \\
&= -\frac{1}{n}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)\,dt
\end{aligned}$$

De la même façon, on effectue une intégration par parties en posant $u_1(t) = \frac{t}{\pi} - 1$ et $v_1(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt)$, on définit des fonctions de classe C^1 sur $[0;\pi]$ et :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)\,dt &= \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}\cos(nt)\,dt \\
&= -\frac{1}{n} + 0
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}}$

2. De façon classique, aucun des dénominateurs des fractions suivantes n'étant nuls car $t \in]0,\pi]$,

$$\begin{aligned}
\frac{1-e^{imt}}{1-e^{it}} &= \frac{e^{im\frac{t}{2}}(e^{-imt/2} - e^{imt/2})}{e^{i\frac{t}{2}}(e^{-it/2} - e^{it/2})} \\
&= \frac{-2i\sin(mt/2)}{-2i\sin(t/2)}\,e^{i(m-1)\frac{t}{2}} \\
&= \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\,e^{i(m-1)\frac{t}{2}}
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\frac{1-e^{imt}}{1-e^{it}}\,e^{it} = \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\,e^{i(m+1)\frac{t}{2}}}$

On a alors : $\sum_{n=1}^{m}\cos(nt) = \sum_{n=1}^{m}\mathcal{R}e(e^{int}) = \mathcal{R}e\left(\sum_{n=1}^{m}(e^{it})^n\right)$ et en utilisant les propriétés des suites géométriques de raison différente de 1 :

$$\sum_{n=1}^{m}\cos(nt) = \mathcal{R}e\left(e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\right) = \mathcal{R}e\left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\,e^{i(m+1)\frac{t}{2}}\right)$$

En conclusion : $\boxed{\sum_{n=1}^{m}\cos(nt) = \frac{\sin(m\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\cos(m+1)\frac{t}{2}}$

3. Soit $v : t \mapsto -\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)$, u et v sont de classe C^1 et $v'(t) = \sin(\lambda t)$ donc avec une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\,dt &= u(\pi)v(\pi) - u(0)v(0) + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi u'(t)\cos(\lambda t)\,dt \\
&= -\frac{u(\pi)}{\lambda}\cos(\lambda\pi) + \frac{u(0)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi u'(t)\cos(\lambda t)\,dt
\end{aligned}$$

Or, pour tout $\lambda > 0$, $\left|-\frac{u(\pi)}{\lambda}\cos(\lambda\pi) + \frac{u(0)}{\lambda}\right| \leqslant \frac{|u(\pi)+u(0)|}{\lambda}$

On en déduit que $\lim_{\lambda\to+\infty} -\frac{u(\pi)}{\lambda}\cos(\lambda\pi) + \frac{u(0)}{\lambda} = 0$ par le théorème d'encadrement des limites. De même $\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^\pi u'(t)\cos(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |u'(t)\cos(\lambda t)|\,dt \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |u'(t)|\,dt$; puisque $\int_0^\pi |u'(t)|\,dt$ est un réel indépendant de λ, on en déduit que $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\int_0^\pi |u'(t)|\,dt = 0$ Finalement, on a bien

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0}$$

4. Nous allons appliquer ici le théorème mal nommé du ≪ prolongement des fonctions de classes C^1 ≫ :
   i. f est C^1 sur $]0;\pi]$ comme quotient de deux fonctions C^1 sur $]0;\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas. En effet, sur $]0;\frac{\pi}{2}]$, la fonction sin ne s'annule pas donc sur $]0;\pi]$, la fonction $t\mapsto \sin t$ ne s'annule pas non plus.
   ii. f est continue en 0 ; en effet d'une part $\frac{t^2}{2\pi} - t \underset{t\to 0}{\sim} -t$, d'autre part $2\sin\frac{t}{2}\underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $f(t)\underset{t\to 0}{\sim} -1$. Ainsi $\lim_{t\to 0} f(t) = -1 = f(0)$. D'où la continuité de f en 0 et donc sur $[0;\pi]$ (puisque, f étant C^1 sur $]0;\pi]$, est aussi continue sur $]0;\pi]$).
   iii. Enfin f' a une limite en 0^+ ; En effet :

$$\begin{aligned}
\forall t\in]0;\pi],\ f'(t) &= \frac{(\frac{t}{\pi}-1)\sin\frac{t}{2} - (\frac{t^2}{2\pi}-t)\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\\
&= \frac{(\frac{t}{\pi}-1)(\frac{t}{2}+o(t^2)) - \frac{1}{2}(\frac{t^2}{2\pi}-t)(1-\frac{t^2}{4}+o(t^2))}{\frac{t^2}{2}+o(t^2)}\\
&= \frac{-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{2\pi}+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4\pi}+o(t^2)}{\frac{t^2}{2}+o(t^2)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{4\pi}}{\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

c'est à dire $f'(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{2\pi}$. D'où enfin :

$\boxed{\lim_{t\to 0} f'(t) = \frac{1}{2\pi}}$ De ces trois points, on déduit de ce théorème que :

$$\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ sur } [0;\pi] \text{ et } f'(0) = \frac{1}{2\pi}}$$

5. a) En utilisant la question 1, la question 2 et la linéarité de l'intégration, on écrit :

$$\begin{aligned}
\forall m\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^m \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\,dt\\
&= \int_0^\pi \sum_{n=1}^m \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\,dt\\
&= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{n=1}^m \cos(nt)\,dt\\
&= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin(m\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\cos(m+1)\frac{t}{2}\,dt\\
&= \int_0^\pi f(t)\underbrace{2\sin(m\frac{t}{2})\cos(m+1)\frac{t}{2}}_{\sin(2m+1)\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}}\,dt\\
&= \int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt - \int_0^\pi \underbrace{f(t)\sin\frac{t}{2}}_{\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)}\,dt\\
&= \int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt - \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\pi}-\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi\\
&= \int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt + \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

b) f étant de classe C^1 d'après la question 4, nous savons d'après la question 3 (avec $u = f$ et $\lambda = \frac{(2m+1)t}{2}$) que $\lim_{m\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt = 0$. Il s'en suit que $\sum_{n=1}^m\frac{1}{n^2}$ a une limite lorsque $n\to+\infty$ (mais nous le savions déjà par un théorème sur les séries de référence...) et que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

II- 1. a) Clairement : pour tout couple (x,y) de $([0;+\infty[)^2$, la série de terme général $\frac{1}{(n+x)(n+y)}$ est à termes positifs et $\frac{1}{(n+x)(n+y)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$ et puisque la série $\sum\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, le critère d'équivalence des séries à termes positifs permet d'affirmer que la série $\sum\frac{1}{(n+x)(n+y)}$ converge. Un raisonnement analogue permet d'affirmer de même que la série $\sum\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ converge.

b) $\sum\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right) = x\sum\frac{1}{n(n+x)}$ donc la série converge d'après 1°)a) avec $y = 0$.

2. $S(0) = \sum\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right) = 0$ et $\forall N\in\mathbb{N}^*\ \sum_{n=1}^N\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{N+1}$

ainsi, $S(1) = \lim_{N\to+\infty} 1-\frac{1}{N+1} = 1$.

3. a. Puisque toutes les séries en présence sont convergentes, on peut écrire : $\forall (x,y)$ de $([0;+\infty[)^2$

$$\begin{aligned} S(y)-S(x) &= \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+y}\right)-\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right) \\ &= \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+y}\right)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{y-x}{(n+x)(n+y)} \\ &= (y-x)\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)(n+y)} \end{aligned}$$

b. On en déduit, puisque x et y sont positifs :
$|S(y)-S(x)|=|(y-x)|\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)(n+y)}\leqslant |y-x|\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ et donc, d'après I-5°-b) :

$$\boxed{|S(y)-S(x)|\leqslant \frac{\pi^2}{6}|y-x|}$$

c. Soit x_0 un réel positif fixé. D'après ce qui précède, pour tout réel positif y :

$$0\leqslant |S(y)-S(x_0)|\leqslant \frac{\pi^2}{6}|y-x_0|$$

or le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 lorque y tend vers x_0, ainsi, par le théorème d'encadrement des limites : $\lim_{y\to x_0}|S(y)-S(x_0)|=0$ et donc $\lim_{y\to x_0}S(y)=S(x_0)$. C'est la preuve que S est continue en x_0. Ceci étant vrai pour tout x_0 de $\mathbb{R}^+$, on peut en déduire que <u>S est continue sur $\mathbb{R}^+$</u>.

4. a. En reprenant 3°a) : $\forall (x,y)$ de $([0;+\infty[)^2$ $\frac{|S(y)-S(x)|}{|y-x|}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)(n+y)}$ Donc, puisque toutes les séries en présence sont convergentes :

$$\begin{aligned} \left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right| &= \left|\sum_{n\geqslant 1}\left[\frac{1}{(n+x)(n+y)}-\frac{1}{(n+x)^2}\right]\right| \\ &\leqslant \sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{(n+x)-(n+y)}{(n+x)^2(n+y)}\right| \\ &\leqslant |y-x|\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \\ &\leqslant |y-x|\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

(x et y étant positifs).

b. Pour x fixé dans $\mathbb{R}^+$, faisant tendre y vers x dans le membre de droite de l'inégalité précédente, le théorème d'encadrement des limites permet d'affirmer que :
$\lim_{y\to x}\left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right|=0$ et donc $\lim_{y\to x}\frac{S(y)-S(x)}{y-x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$. C'est la preuve que la fonction S est dérivable en tout x de $\mathbb{R}^+$ avec :

$$\boxed{S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}}$$

c. En remplaçant dans l'égalité précédente x par 0, il vient immédiatement, d'après I-5°)b) : $\boxed{S'(0)=\frac{\pi^2}{6}}$. De même, avec $x=1$: $S'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, c'est à dire : $\boxed{S'(1)=\frac{\pi^2}{6}-1}$

5. Clairement, la série donnant $-S"(x)$ est convergente et à terme positifs, donc $S"\leqslant 0$ et donc <u>S est concave</u>. (en notant tout de même que pour être tout à fait en règle avec le programme officiel, il aurait fallu admettre que S soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$)

6. a) Soit $A>1$ la fonction φ est une fonction rationnelle sur $[1;+\infty[$, elle est continue sur $[1,A]$ et l'intégrale $\int_1^A\varphi(t)\,dt$ existe et vaut :
$[\ln(t)-\ln(t+x)]_1^A=\ln(A)-\ln(A+x)-\ln 1+\ln(1+x)=\ln\left(\frac{A}{A+x}\right)+\ln(1+x)$
or $\lim_{A\to+\infty}\frac{A}{A+x}=1$ donc $\lim_{A\to+\infty}\ln\left(\frac{A}{A+x}\right)=0$, ainsi : $\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\varphi(t)\,dt$ <u>existe</u> et vaut $\ln(1+x)$:

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt=\ln(1+x)}$$

b) Si $t\geqslant 1$ $\varphi'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{(t+x)^2}<0$. Donc φ est décroissante sur $[1;+\infty[$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall t\in[n;n+1]$, $\varphi(n+1)\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(n)$. On peut alors intégrer cet encadrement sur [n,n+1], les bornes étant "dans le bon sens" :
$\varphi(n+1)\leqslant\int_n^{n+1}\varphi(t)\,dt\leqslant\varphi(n)$, et pour $N\in\mathbb{N}^*$, sommons cet encadrement pour n variant de 1 à N :

$$\sum_{n=1}^{N}\varphi(n+1)\leqslant\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\varphi(t)\,dt\leqslant\sum_{n=1}^{N}\varphi(n)$$

c'est à dire, par la "relation de Chasles" :

$$\sum_{n=1}^{N}\varphi(n+1)\leqslant\int_1^{N+1}\varphi(t)\,dt\leqslant\sum_{n=1}^{N}\varphi(n)$$

d'où :

$$\sum_{n=2}^{N+1}\varphi(n)\leqslant\int_1^{N+1}\varphi(t)\,dt\leqslant\sum_{n=1}^{N}\varphi(n)$$

Les trois membres de cet encadrement convergent lorsque N tend vers $+\infty$ donc :

$$S(x)-\varphi(1)\leqslant\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt\leqslant S(x)$$

ou encore :

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt\leqslant S(x)\leqslant 1+\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt}$$

(car $\varphi(1)=1-\frac{1}{1+x}\leqslant 1$)

c) En utilisant le résultat de 6°)a) :

$$\ln(1+x)\leqslant S(x)\leqslant 1+\ln(1+x)$$