



# Corrigés des épreuves de mathématiques sp (voie S et voie E)

François Delaplace (voie E), Pierre Girard (voie S)

Professeurs de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Notre-Dame du

## Voie scientifique



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE ÉPREUVE :  
295  
EML\_MATS

Concepteur : EM LYON

1<sup>ère</sup> épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 9 mai 2005 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.  
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

### PREMIER PROBLÈME

On considère la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geq 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier  $n \geq 2$  et tout réel  $x$ ,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

PARTIE I : Étude de la suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Calculer  $T_2$  et  $T_3$ .
- a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_n$  est un polynôme de degré  $n$ , dont on déterminera le coefficient du terme de degré  $n$ .  
b. Établir que, si  $n$  est un entier pair (resp. impair), alors  $T_n$  est un polynôme pair (resp. impair).
- Calculer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_n(1)$  en fonction de  $n$ .
- a. Établir, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $\theta$  de  $]0; \pi[$  :  
$$T_n(\cos \theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $T_n$  admet  $n$  racines réelles, toutes situées dans  $] -1; 1[$ , que l'on explicitera.

c. Établir, pour tout entier naturel non nul  $n$  :

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left( X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

d. En déduire, pour tout entier naturel non nul  $n$ , la valeur de  $\prod_{k=1}^n \frac{k\pi}{2(n+1)}$  en fonction de  $n$ .

1/4

Référence

# 2005

## écifiques à l'EM Lyon

Grandchamp (Versailles).

5. a. Démontrer, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $\theta$  de  $]0; \pi[$  :

$$\sin^2 \theta T_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta T_n'(\cos \theta) + (n^2 + 2n) T_n(\cos \theta) = 0.$$

Indication: On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) :

$$\theta \mapsto \sin \theta T_n(\cos \theta) - \sin(n+1)\theta.$$

b. En déduire, pour tout entier naturel  $n$  :

$$(X^2 - 1)T_n'' + 3X T_n' - (n^2 + 2n)T_n = 0.$$

Dans la suite du problème,  $n$  désigne un entier naturel fixé tel que  $n \geq 2$ , et on note  $E$  l'espace vectoriel réel des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On note  $L$  l'application qui, à un polynôme  $P$  de  $E$ , associe le polynôme  $L(P)$  défini par :

$$L(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'.$$

### PARTIE II : Étude de l'endomorphisme $L$

1. Montrer que  $L$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $E$ .

2. a. Calculer  $L(T_k)$  pour tout  $k$  de  $\{0, 1, \dots, n\}$ .

b. En déduire les valeurs propres de  $L$  et, pour chaque valeur propre de  $L$ , une base et la dimension du sous-espace propre associé.

### PARTIE III : Étude d'un produit scalaire

Dans la suite du problème, on note  $\varphi$  l'application qui, à un couple  $(P, Q)$  de polynômes de  $E$ , associe le réel  $\varphi(P, Q)$  défini par :

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) Q(x) dx.$$

1. Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

2. Démontrer, pour tous polynômes  $P, Q$  de  $E$  :

$$\varphi(L(P), Q) = \varphi(P, L(Q)).$$

Indication: On pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\varphi(L(P), Q) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} P'(x) Q'(x) dx.$$

3. Établir que  $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base orthogonale de  $E$ .

2/4

Référence

DEUXIÈME PROBLÈME

PARTIE I : Calcul de la somme d'une série convergente

- Vérifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\int_0^\pi \left(\frac{t}{2\pi} - t\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$ .
- Établir, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $t \in ]0; \pi[$  : 
$$\frac{1 - e^{im}}{1 - e^t} e^{it} = \frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} e^{i\frac{(m+1)t}{2}}$$
, puis  $\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$ .
- Soit  $u : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$ .  
Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :  $\int_0^\pi u(t) \sin(mt) dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ .
- Soit l'application  $f : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$  si  $t \in ]0; \pi[$ , et  $f(0) = -1$ .  
Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0; \pi]$ .
- a. Montrer :  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt$ .  
b. Justifier la convergence de la série  $\sum_{n>1} \frac{1}{n^2}$  et montrer :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

- a. Montrer que, pour tout couple  $(x, y) \in (0; +\infty[)^2$ , la série  $\sum_{n>1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$  et la série  $\sum_{n>1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$  convergent.  
b. Montrer que, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , la série  $\sum_{n>1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$  converge.

On note  $S$  l'application définies, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , par  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ .

- Calculer  $S(0)$  et  $S(1)$ .

- a. Établir :  $\forall (x, y) \in (0; +\infty[)^2$ ,  $S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ .

b. En déduire :  $\forall (x, y) \in (0; +\infty[)^2$ ,  $|S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y-x|$ .

c. Montrer alors que la fonction  $S$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

- a. Montrer, pour tout couple  $(x, y)$  de  $(0; +\infty[)^2$  tel que  $x \neq y$  : 
$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$
.

b. En déduire que la fonction  $S$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

c. Préciser les valeurs de  $S'(0)$  et de  $S'(1)$ .

- On admet que  $S$  est deux fois dérivable sur  $[0; +\infty[$  et que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, S''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}.$$

Montrer que  $S$  est concave.

- Soit  $x \in ]0; +\infty[$  fixé. On note  $\varphi$  la fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par :

$$\forall t \in [1; +\infty[, \varphi(t) = \frac{1}{t-t+x}.$$

a. Montrer que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$  converge et calculer sa valeur.

b. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(n)$ ,

et en déduire :  $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ .

c. Conclure :  $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x$ .

- a. Dresser le tableau de variation de  $S$ , en précisant la limite de  $S$  en  $+\infty$ .

b. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $S$ .

## Premier problème

I- Étude de la suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. En appliquant la définition de la suite :  $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X(2X) - 1 = 4X^2 - 1$  et  $T_3 = 2X \underbrace{(4X^2 - 1)}_{T_2} - \underbrace{2X}_{T_1} = 8X^3 - 4X$

2. a. Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  la proposition :

$$\mathcal{P}(n) = \text{"Le monôme de plus haut degré de } T_n \text{ est } 2^n X^n \text{"}$$

La proposition est clairement vraie pour  $n = 0$  et pour  $n = 1$  puisque  $T_0 = 1 = 2^0 X^0$  et  $T_1 = 2X = 2^1 X^1$ . Soit  $n$  un entier naturel quelconque  $\geq 1$  et fixé ; Supposons que la proposition  $\mathcal{P}(k)$  soit vraie pour tout entier naturel  $k \leq n$  ; Ce qui signifie que pour tout  $k \leq n$ , il existe un polynôme  $U_k$  de degré strictement inférieur à  $k$  tel que  $T_k = 2^k X^k + U_k$ . Et puisque  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n-1)$  sont vraies, on a  $T_{n+1} = 2X \underbrace{(2^n X^n + U_n)}_{T_n} - \underbrace{(2^{n-1} X^{n-1} + U_{n-1})}_{T_{n-1}}$

c'est à dire :  $T_{n+1} = 2^{n+1} X^{n+1} + (2XU_n - 2^{n-1} X^{n-1} - U_{n-1})$ .

Posons alors  $U_{n+1} = 2XU_n - 2^{n-1} X^{n-1} - U_{n-1}$  : On a  $\deg(U_{n+1}) \leq \max(\deg(2XU_n), \deg(2^{n-1} X^{n-1}), \deg(U_{n-1})) < \max(1 + (n-1), n-1, n-1)$  donc  $\deg(U_{n+1}) < n$  et  $T_{n+1} = 2^{n+1} X^{n+1} + U_{n+1}$ . Ce qui prouve que la proposition  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. Par le théorème de récurrence forte, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n \text{ et son coefficient de degré } n \text{ est } 2^n} \quad (1)$$

b. Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  la proposition :  $\mathcal{Q}(n) = \text{"}T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)\text{"}$ . La proposition est clairement vraie pour  $n = 0$  et pour  $n = 1$  puisque  $T_0 = 1$  et  $T_1 = 2X$ . Soit  $n$  un entier naturel quelconque  $\geq 1$  et fixé ; Supposons que la proposition  $\mathcal{Q}(k)$  soit vraie pour tout entier naturel  $k \leq n$  ; On a alors :

$$\begin{aligned} T_{n+1}(-X) &= 2(-X)T_n(-X) - T_{n-1}(-X) \\ &= (-1)^{n+1} 2X T_n(X) - (-1)^{n-1} T_{n-1}(X) \\ &= (-1)^{n+1} [2X T_n(X) - T_{n-1}(X)] \\ &= (-1)^{n+1} T_{n+1}(X) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la proposition  $\mathcal{Q}(n+1)$  est vraie. Par le théorème de récurrence forte, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)} \quad (2)$$

Conclusion : Si  $n$  est pair alors  $T_n$  est pair et si  $n$  est impair alors  $T_n$  est impair.

3. On peut faire quelques essais et s'apercevoir que, pour  $n = 0, 1, 2$  et  $3$ ,  $T_n(1) = n + 1$ . Montrons-le par récurrence : Soit  $\mathcal{R}(n) = \text{"}T_n(1) = n\text{"}$ . La proposition est clairement vraie pour  $n = 0$  et pour  $n = 1$  puisque  $T_0(1) = 1$  et  $T_1(1) = 2 \cdot 1 = 2$ . Soit  $n$  un entier naturel quelconque  $\geq 1$  et fixé ; Supposons que la proposition  $\mathcal{R}(k)$  soit vraie pour tout entier naturel  $k \leq n$  ; On a alors :

$$T_{n+1}(1) = 2 \cdot 1 T_n(1) - T_{n-1}(1) = 2(n+1) - n = n+2$$

Ce qui prouve que la proposition  $\mathcal{R}(n+1)$  est vraie. Par le théorème de récurrence forte, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_n(1) = n+1} \quad (3)$$

4. a. On pourrait facilement raisonner par récurrence mais pour changer, utilisons une méthode qui nous fera réviser une autre partie du programme. Posons, pour tout entier naturel :  $u_n = T_n(\cos \theta)$  ; on définirait ainsi une suite numérique récurrente linéaire d'ordre 2 telle que :

$$\begin{cases} u_0 = T_0(\cos \theta) = 1, \\ u_1 = T_1(\cos \theta) = 2 \cos \theta, \\ \forall n \geq 2, u_n = 2 \cos \theta u_{n-1} - u_{n-2} \end{cases}$$

L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est :

$$Z^2 - 2 \cos \theta Z + 1 = 0$$

son discriminant est  $\Delta = 4(\cos^2 \theta - 1) = -4 \sin^2 \theta < 0$  car  $\theta \in ]0; \pi[$ . Ses racines sont donc :  $Z_1 = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$  et  $Z_2 = \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}$  (puisque  $\theta \in ]0; \pi[$ ,  $\sqrt{\sin^2 \theta} = |\sin \theta| = \sin \theta$ ).

Il existe donc deux constantes réelles  $A$  et  $B$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A \cos n\theta + B \sin n\theta$ . On trouve  $A$  et  $B$  en résolvant le système :

$$\begin{cases} u_0 = 1 = A \\ u_1 = 2 \cos \theta = A \cos \theta + B \sin \theta \end{cases}$$

Ce qui donne immédiatement :  $A = 1$  et  $B = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$  (On rappelle que  $\sin \theta \neq 0$  car  $\theta \in ]0; \pi[$ )

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos n\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin n\theta = \frac{\cos n\theta \sin \theta + \sin n\theta \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

En conclusion :

$$\boxed{T_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}} \quad (4)$$

b. Soit  $n \geq 1$  ; Pour tout réel  $\theta_k = k \cdot \frac{\pi}{n+1}$  (avec  $1 \leq k \leq n$ ) on a  $\theta_k \in ]0; \pi[$  et  $\sin(n+1)\theta_k = \sin k\pi = 0$  donc, d'après la question précédente,  $\forall k \in \{1, \dots, n\} T_n[\cos \theta_k] = 0$ .  $\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_n$  sont donc  $n$  racines réelles de  $T_n$ . Elles sont distinctes car la fonction  $\cos$  est strictement décroissante sur  $]0; \pi[$ .  $T_n$  étant de degré  $n$  d'après la question 2°) a), On en déduit que l'on a là toutes les racines de  $T_n$ .

$$\text{Conclusion : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_n \text{ a } n \text{ racines : } \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right), \dots, \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)}$$

c. Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $T_n$  est de degré  $n$ , de coefficient dominant  $2^n$  et de racines  $\cos\left(\frac{\theta}{n+1}\right), \dots, \cos\left(\frac{n\theta}{n+1}\right)$ , donc, d'après le théorème de factorisation des polynômes :

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left( X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$$

d. En particulier, pour  $X = 1$ ,  $T_n(1) = 2^n \prod_{k=1}^n \left( 1 - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$ , d'où, compte tenu de (3) :

$$n+1 = 2^n \prod_{k=1}^n \left( 2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right), \text{ d'où : } \prod_{k=1}^n \left( \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) = \frac{n+1}{4^n} \text{ c'est à dire :}$$

$$\prod_{k=1}^n \left( \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) = \sqrt{\frac{n+1}{4^n}}$$

5. a. Comme indiqué dans l'énoncé, utilisons la fonction  $g : \theta \mapsto \sin \theta T_n(\cos \theta) - \sin(n+1)\theta$ . Cette fonction est bien la fonction nulle d'après (4) elle est donc deux fois dérivable sur  $]0; \pi[$  avec, successivement :

$$g'(\theta) = \cos \theta T_n'(\theta) - \sin^2 \theta T_n''(\theta) - (n+1) \cos(n+1)\theta$$

$$g''(\theta) = -\sin \theta T_n'(\cos \theta) - \sin \theta \cos \theta T_n''(\cos \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta T_n'''(\cos \theta) + \dots$$

$$\dots + \sin^3 \theta T_n''(\cos \theta) + (n+1)^2 \underbrace{\sin(n+1)\theta}_{\sin \theta T_n(\cos \theta)}$$

C'est à dire :

$$g''(\theta) = -\sin \theta [T_n'(\cos \theta) + 3 \cos \theta T_n''(\cos \theta) - \sin^2 \theta T_n'''(\cos \theta) - (n+1)^2 T_n(\cos \theta)]$$

En simplifiant par le réel non nul  $(-\sin \theta)$ , on en déduit que, pour tout  $\theta$  de  $]0; \pi[$ ,

$$T_n(\cos \theta) + 3 \cos \theta T_n''(\cos \theta) - \sin^2 \theta T_n'''(\cos \theta) - (n+1)^2 T_n(\cos \theta) = 0$$

c'est à dire :

$$\sin^2 \theta T_n'''(\cos \theta) - 3 \cos \theta T_n''(\cos \theta) + (n^2 + 2n) T_n(\cos \theta) = 0$$

b. On en déduit que, pour tout  $u$  de  $] -1; 1[$ , puisque  $\cos \theta$  décrit  $] -1; 1[$  lorsque  $\theta$  décrit  $]0; \pi[$ ,

$$(1 - u^2) T_n'''(u) - 3u T_n''(u) + (n^2 + 2n) T_n(u) = 0$$

D'où enfin :

$$\forall u \in ] -1; 1[, (u^2 - 1) T_n'''(u) + 3u T_n''(u) - (n^2 + 2n) T_n(u) = 0$$

Le polynôme  $(X^2 - 1) T_n''' + 3X T_n'' - (n^2 + 2n) T_n$  a donc une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1) T_n''' + 3X T_n'' - (n^2 + 2n) T_n = 0$$

II- 1. On note déjà que si  $P$  est un élément de  $E$  alors  $P'$  et  $P''$  sont des éléments de  $E$  donc  $L(P)$  est aussi un élément de  $E$ . Deplus, si  $P$  et  $Q$  sont des éléments de  $E$  et si  $k$  est un réel alors

$$\begin{aligned} L(kP + Q) &= (X^2 - 1)(kP'' + Q'') + 3X(kP' + Q') \\ &= k[(X^2 - 1)P'' + 3XP'] + (X^2 - 1)Q'' + 3XQ' \\ &= kL(P) + L(Q) \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que  $L$  est un endomorphisme de  $E$

2. a. Pour tout  $k$  de  $\{0, 1, \dots, n\}$ ,  $L(T_k) = (X^2 - 1)T_k'' + 3XT_k'$  donc, d'après I-5-b,

$$L(T_k) = (k^2 + 2k)T_k$$

b. Aucun des polynômes  $T_k$  n'étant nuls, on en déduit que  $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$   $T_k$  est un vecteur propre de  $L$  associé à la valeur propre  $k^2 + 2k$ .

Les nombres  $k^2 + 2k$  étant tous distincts lorsque  $k$  décrit  $\{0, 1, \dots, n\}$  (par exemple parce que l'application  $t \mapsto t^2 + 2t$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ ), on en déduit que  $L$  a  $(n+1)$  valeurs propres distinctes et puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n+1$ , il est donc diagonalisable; le sous-espace propre associé à la valeur propre  $k^2 + 2k$  étant  $\text{vect}\{T_k\}$  (donc de dimension 1).

III- 1. Soient  $P, Q$  et  $R$  trois éléments de  $E$  et  $k$  un réel. D'une part  $\varphi(P, Q)$  est bien un réel (II s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur  $[-1; 1]$ ), d'autre part

$$\begin{aligned} \varphi(kP + Q, R) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} (kP(x) + Q(x)) R(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} (kP(x)R(x) + Q(x)R(x)) dx \\ &= k \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x)R(x) dx + \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} Q(x)R(x) dx \\ &= k\varphi(P, R) + \varphi(Q, R) \end{aligned}$$

$$\text{et } \varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x)Q(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} Q(x)P(x) dx = \varphi(Q, P)$$

$\varphi$  est donc une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  et  $\varphi(P, P) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P^2(x) dx \geq 0$  car

c'est l'intégrale d'une fonction positive et continue sur  $[-1; 1]$ . Enfin, si  $\varphi(P, P) = 0$  alors  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P^2(x) dx = 0$  or l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment n'est nulle que si cette fonction est nulle sur ce segment; ce qui signifie ici que  $\forall x \in [-1; 1] \sqrt{1-x^2} P^2(x) = 0$  donc  $\forall x \in ] -1; 1[ P^2(x) = 0$  donc  $P$  est nul sur  $] -1; 1[$ , il a donc une infinité de racine : c'est donc le polynôme nul. Conclusion :  $(\varphi(P, P) = 0) \Rightarrow (P = 0)$

Tous ces résultats nous démontrent bien que

$$\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E$$

2. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 u : x \mapsto u(x) &= -(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x) \text{ et } Q \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } [-1;1], \\
 u'(x) &= 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P'(x) - (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P''(x) = (1-x^2)^{\frac{3}{2}}[3xP'(x) - (1-x^2)P''(x)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(L(P), Q) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}[L(P)](x)Q(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}[(x^2-1)P''(x) + 3xP'(x)]Q(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}[-(1-x^2)P''(x) + 3xP'(x)]Q(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 u'(x)Q(x) dx \\
 &= u(1)Q(1) - u(-1)Q(-1) - \int_{-1}^1 u(x)Q'(x) dx \\
 &= - \int_{-1}^1 -(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x) dx
 \end{aligned}$$

C'est à dire :

$$\boxed{\varphi(L(P), Q) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x) dx}$$

Par le même calcul et en échangeant les rôles de  $P$  et  $Q$ , on trouverait :

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}Q'(x)P'(x) dx = \varphi(L(Q), P); \text{ on a donc bien :}$$

$$\boxed{\varphi(L(P), Q) = \varphi(P, L(Q))}$$

3.  $L$  est donc un endomorphisme symétrique de  $E$ . On sait alors que des vecteurs propres de  $L$  associés à des valeurs propres distinctes formeront toujours une famille libre orthogonale ; c'est le cas de  $\{T_0, \dots, T_n\}$  qui est donc une famille libre et orthogonale ; puisqu'elle contient  $n+1$  éléments de  $E$  qui est de dimension  $n+1$ , on en conclut que

$$\boxed{\{T_0, \dots, T_n\} \text{ est une base orthogonale de } E}$$

## Deuxième problème

I- 1. La fonction à intégrer est clairement continue sur  $[0; \pi]$ , on effectue alors une intégration par parties en posant  $u(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$  et  $v(t) = \frac{1}{n} \sin(nt)$ , on définit des fonctions de classe  $C^1$  sur  $[0; \pi]$  et :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt &= \left[ \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left( \frac{1}{n} \sin(nt) \right) \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \left( \frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt \\
 &= -\frac{1}{n} \int_0^\pi \left( \frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt
 \end{aligned}$$

De la même façon, on effectue une intégration par parties en posant  $u_1(t) = \frac{t}{\pi} - 1$  et  $v_1(t) = -\frac{1}{n} \cos(nt)$ , on définit des fonctions de classe  $C^1$  sur  $[0; \pi]$  et :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \left( \frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt &= \left[ \left( \frac{t}{\pi} - 1 \right) \left( -\frac{1}{n} \cos(nt) \right) \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \cos(nt) dt \\
 &= -\frac{1}{n} + 0
 \end{aligned}$$

Finalement,  $\boxed{\int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}}$

2. De façon classique, aucun des dénominateurs des fractions suivantes n'étant nuls car  $t \in ]0, \pi]$ ,

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} &= \frac{e^{im\frac{t}{2}}(e^{-imt/2} - e^{imt/2})}{e^{i\frac{t}{2}}(e^{-it/2} - e^{it/2})} \\
 &= \frac{-2i \sin(mt/2)}{-2i \sin(t/2)} e^{i(m-1)\frac{t}{2}} \\
 &= \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} e^{i(m-1)\frac{t}{2}}
 \end{aligned}$$

Finalement  $\boxed{\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} e^{i(m+1)\frac{t}{2}}}$

On a alors :  $\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \sum_{n=1}^m \operatorname{Re}(e^{int}) = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^m (e^{it})^n \right)$  et en utilisant les propriétés des suites géométriques de raison différente de 1 :

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \operatorname{Re} \left( e^{it} \frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} e^{i(m+1)\frac{t}{2}} \right)$$

En conclusion :  $\boxed{\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\sin(m\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \cos(m+1)\frac{t}{2}}$

3. Soit  $v : t \mapsto -\frac{1}{\lambda} \cos(\lambda t)$ ,  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  et  $v'(t) = \sin(\lambda t)$  donc avec une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt &= u(\pi)v(\pi) - u(0)v(0) + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi u'(t) \cos(\lambda t) dt \\
 &= -\frac{u(\pi)}{\lambda} \cos(\lambda\pi) + \frac{u(0)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi u'(t) \cos(\lambda t) dt
 \end{aligned}$$

Or, pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\left| -\frac{u(\pi)}{\lambda} \cos(\lambda\pi) + \frac{u(0)}{\lambda} \right| \leq \frac{|u(\pi) + u(0)|}{\lambda}$

On en déduit que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -\frac{u(\pi)}{\lambda} \cos(\lambda\pi) + \frac{u(0)}{\lambda} = 0$  par le théorème d'encadrement des limites. De même  $\left| \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi u'(t) \cos(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi |u'(t) \cos(\lambda t)| dt \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi |u'(t)| dt$ ; puisque  $\int_0^\pi |u'(t)| dt$  est un réel indépendant de  $\lambda$ , on en déduit que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi |u'(t)| dt = 0$ . Finalement, on a bien

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

4. Nous allons appliquer ici le théorème mal nommé du « prolongement des fonctions de classes  $C^1 \gg$  » :

- i.  $f$  est  $C^1$  sur  $]0; \pi[$  comme quotient de deux fonctions  $C^1$  sur  $]0; \pi[$  dont le dénominateur ne s'annule pas. En effet, sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$ , la fonction  $\sin$  ne s'annule pas donc sur  $]0; \pi[$ , la fonction  $t \mapsto \sin t$  ne s'annule pas non plus.
- ii.  $f$  est continue en 0; en effet d'une part  $\frac{t^2}{2\pi} - t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t$ , d'autre part  $2 \sin \frac{t}{2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$  donc  $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -1$ . Ainsi  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = -1 = f(0)$ . D'où la continuité de  $f$  en 0 et donc sur  $]0; \pi[$  (puisque,  $f$  étant  $C^1$  sur  $]0; \pi[$ , est aussi continue sur  $]0; \pi[$ ).
- iii. Enfin  $f'$  a une limite en  $0^+$ ; En effet :

$$\begin{aligned} \forall t \in ]0; \pi[, f'(t) &= \frac{(\frac{t}{\pi} - 1) \sin \frac{t}{2} - (\frac{t^2}{2\pi} - t) \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \\ &= \frac{(\frac{t}{\pi} - 1)(\frac{t}{2} + o(t^2)) - \frac{1}{2}(\frac{t^2}{2\pi} - t)(1 - \frac{t^2}{4} + o(t^2))}{\frac{t^2}{2} + o(t^2)} \\ &= \frac{-\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2\pi} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4\pi} + o(t^2)}{\frac{t^2}{2} + o(t^2)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{4\pi}}{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

c'est à dire  $f'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\pi}$ . D'où enfin :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{De ces trois points, on déduit de ce théorème que :}$$

$$f \text{ est } C^1 \text{ sur } ]0; \pi[ \text{ et } f'(0) = \frac{1}{2\pi}$$

5. a) En utilisant la question 1, la question 2 et la linéarité de l'intégration, on écrit :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^m \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt \\ &= \int_0^\pi \sum_{n=1}^m \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt \\ &= \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sum_{n=1}^m \cos(nt) dt \\ &= \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{\sin(m\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \cos(m+1) \frac{t}{2} dt \\ &= \int_0^\pi f(t) \underbrace{2 \sin(m\frac{t}{2}) \cos(m+1) \frac{t}{2}}_{\sin(2m+1)\frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt - \int_0^\pi \underbrace{f(t) \sin \frac{t}{2}}_{\frac{1}{2}(\frac{t^2}{2\pi} - t)} dt \\ &= \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt - \frac{1}{2} \left[ \frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi \\ &= \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt + \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

b)  $f$  étant de classe  $C^1$  d'après la question 4, nous savons d'après la question 3 (avec  $u = f$  et  $\lambda = \frac{(2m+1)t}{2}$ ) que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt = 0$ . Il s'en suit que  $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2}$  a une limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  (mais nous le savions déjà par un théorème sur les séries de référence...) et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

II- 1. a) Clairement : pour tout couple  $(x, y)$  de  $(]0; +\infty[)^2$ , la série de terme général  $\frac{1}{(n+x)(n+y)}$  est à termes positifs et  $\frac{1}{(n+x)(n+y)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$  et puisque la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente, le critère d'équivalence des séries à termes positifs permet d'affirmer que la série  $\sum \frac{1}{(n+x)(n+y)}$  converge. Un raisonnement analogue permet d'affirmer de même que la série  $\sum \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$  converge.

b)  $\sum \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) = x \sum \frac{1}{n(n+x)}$  donc la série converge d'après 1°)a) avec  $y = 0$ .

$$2. S(0) = \sum \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) = 0 \text{ et } \forall N \in \mathbb{N}^* \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

ainsi,  $S(1) = \lim_{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$ .

3. a. Puisque toutes les séries en présence sont convergentes, on peut écrire :  $\forall(x, y)$  de  $([0; +\infty[)^2$

$$\begin{aligned} S(y) - S(x) &= \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+y} \right) - \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+y} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{y-x}{(n+x)(n+y)} \\ &= (y-x) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \end{aligned}$$

b. On en déduit, puisque  $x$  et  $y$  sont positifs :

$$|S(y) - S(x)| = |(y-x)| \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \leq |y-x| \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ et donc, d'après I-5°-b) :}$$

$$\boxed{|S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y-x|}$$

c. Soit  $x_0$  un réel positif fixé. D'après ce qui précède, pour tout réel positif  $y$  :

$$0 \leq |S(y) - S(x_0)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y - x_0|$$

or le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 lorsque  $y$  tend vers  $x_0$ , ainsi, par le théorème d'encadrement des limites :  $\lim_{y \rightarrow x_0} |S(y) - S(x_0)| = 0$  et donc  $\lim_{y \rightarrow x_0} S(y) = S(x_0)$ .

C'est la preuve que  $S$  est continue en  $x_0$ . Ceci étant vrai pour tout  $x_0$  de  $\mathbb{R}^+$ , on peut en déduire que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

4. a. En reprenant 3°a) :  $\forall(x, y)$  de  $([0; +\infty[)^2$   $\frac{|S(y) - S(x)|}{|y-x|} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$  Donc,

puisque toutes les séries en présence sont convergentes :

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| &= \left| \sum_{n \geq 1} \left[ \frac{1}{(n+x)(n+y)} - \frac{1}{(n+x)^2} \right] \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \left| \frac{(n+x) - (n+y)}{(n+x)^2(n+y)} \right| \\ &\leq |y-x| \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \\ &\leq |y-x| \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

( $x$  et  $y$  étant positifs).

b. Pour  $x$  fixé dans  $\mathbb{R}^+$ , faisant tendre  $y$  vers  $x$  dans le membre de droite de l'inégalité précédente, le théorème d'encadrement des limites permet d'affirmer que :

$$\lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| = 0 \text{ et donc } \lim_{y \rightarrow x} \frac{S(y) - S(x)}{y-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}. \text{ C'est la}$$

preuve que la fonction  $S$  est dérivable en tout  $x$  de  $\mathbb{R}^+$  avec :

$$\boxed{S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}}$$

c. En remplaçant dans l'égalité précédente  $x$  par 0, il vient immédiatement, d'après I-5°)b) :

$$\boxed{S'(0) = \frac{\pi^2}{6}}. \text{ De même, avec } x = 1 : S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ c'est à dire :}$$

$$\boxed{S'(1) = \frac{\pi^2}{6} - 1}$$

5. Clairement, la série donnant  $-S''(x)$  est convergente et à terme positifs, donc  $S'' \leq 0$  et donc  $S$  est concave. (en notant tout de même que pour être tout à fait en règle avec le programme officiel, il aurait fallu admettre que  $S$  soit de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^+$ )

6. a) Soit  $A > 1$  la fonction  $\varphi$  est une fonction rationnelle sur  $[1; +\infty[$ , elle est continue sur

$[1, A]$  et l'intégrale  $\int_1^A \varphi(t) dt$  existe et vaut :

$$[\ln(t) - \ln(t+x)]_1^A = \ln(A) - \ln(A+x) - \ln 1 + \ln(1+x) = \ln\left(\frac{A}{A+x}\right) + \ln(1+x)$$

or  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A}{A+x} = 1$  donc  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{A}{A+x}\right) = 0$ , ainsi :  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \varphi(t) dt$  existe et vaut  $\ln(1+x)$  :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt = \ln(1+x)}$$

b) Si  $t \geq 1$   $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+x)^2} < 0$ . Donc  $\varphi$  est décroissante sur  $[1; +\infty[$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall t \in [n; n+1]$ ,  $\varphi(n+1) \leq \varphi(t) \leq \varphi(n)$ . On peut alors intégrer cet encadrement sur  $[n, n+1]$ , les bornes étant "dans le bon sens" :

$\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(n)$ , et pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , sommons cet encadrement pour  $n$  variant de 1 à  $N$  :

$$\sum_{n=1}^N \varphi(n+1) \leq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=1}^N \varphi(n)$$

c'est à dire, par la "relation de Chasles" :

$$\sum_{n=1}^N \varphi(n+1) \leq \int_1^{N+1} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=1}^N \varphi(n)$$

d'où :

$$\sum_{n=2}^{N+1} \varphi(n) \leq \int_1^{N+1} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=1}^N \varphi(n)$$

Les trois membres de cet encadrement convergent lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$  donc :

$$S(x) - \varphi(1) \leq \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x)$$

ou encore :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt}$$

(car  $\varphi(1) = 1 - \frac{1}{1+x} \leq 1$ )

c) En utilisant le résultat de 6°)a) :

$$\ln(1+x) \leq S(x) \leq 1 + \ln(1+x)$$