



Corrigés des épreuves de mathématiques sp (voie S et voie E)

François Delaplace (voie E), Pierre Girard (voie S)

Professeurs de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Notre-Dame du

Voie scientifique



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE ÉPREUVE :
295
EML_MATS

Concepteur : EM LYON

1^{ère} épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 9 mai 2005 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geq 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel x ,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

PARTIE I : Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Calculer T_2 et T_3 .
- a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , T_n est un polynôme de degré n , dont on déterminera le coefficient du terme de degré n .
b. Établir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).
- Calculer, pour tout entier naturel n , $T_n(1)$ en fonction de n .
- a. Établir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0; \pi[$:
$$T_n(\cos \theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $] -1; 1[$, que l'on explicitera.

c. Établir, pour tout entier naturel non nul n :

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

d. En déduire, pour tout entier naturel non nul n , la valeur de $\prod_{k=1}^n \frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n .

1/4

Référence

2005

écificiques à l'EM Lyon

Grandchamp (Versailles).

5. a. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0; \pi[$:

$$\sin^2 \theta T_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta T_n'(\cos \theta) + (n^2 + 2n) T_n(\cos \theta) = 0.$$

Indication: On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) :

$$\theta \mapsto \sin \theta T_n(\cos \theta) - \sin(n+1)\theta.$$

b. En déduire, pour tout entier naturel n :

$$(X^2 - 1)T_n'' + 3X T_n' - (n^2 + 2n)T_n = 0.$$

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel fixé tel que $n \geq 2$, et on note E l'espace vectoriel réel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n .

On note L l'application qui, à un polynôme P de E , associe le polynôme $L(P)$ défini par :

$$L(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'.$$

PARTIE II : Étude de l'endomorphisme L

1. Montrer que L est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

2. a. Calculer $L(T_k)$ pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$.

b. En déduire les valeurs propres de L et, pour chaque valeur propre de L , une base et la dimension du sous-espace propre associé.

PARTIE III : Étude d'un produit scalaire

Dans la suite du problème, on note φ l'application qui, à un couple (P, Q) de polynômes de E , associe le réel $\varphi(P, Q)$ défini par :

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) Q(x) dx.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

2. Démontrer, pour tous polynômes P, Q de E :

$$\varphi(L(P), Q) = \varphi(P, L(Q)).$$

Indication: On pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\varphi(L(P), Q) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} P'(x) Q'(x) dx.$$

3. Établir que $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de E .

2/4

Référence

DEUXIÈME PROBLÈME

PARTIE I : Calcul de la somme d'une série convergente

- Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_0^\pi \left(\frac{t}{2\pi} - t\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.
- Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in]0; \pi[$:
$$\frac{1 - e^{im}}{1 - e^t} e^{it} = \frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} e^{i\frac{(m+1)t}{2}}$$
, puis $\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$.
- Soit $u :]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 .
Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $\int_0^\pi u(t) \sin(mt) dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$.
- Soit l'application $f :]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$ si $t \in]0; \pi[$, et $f(0) = -1$.
Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; \pi[$.
- a. Montrer : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt$.
b. Justifier la convergence de la série $\sum_{n>1} \frac{1}{n^2}$ et montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

- a. Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in (0; +\infty[)^2$, la série $\sum_{n>1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\sum_{n>1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.
- Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, la série $\sum_{n>1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

On note S l'application définies, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

- Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

- a. Établir : $\forall (x, y) \in (0; +\infty[)^2$, $S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

b. En déduire : $\forall (x, y) \in (0; +\infty[)^2$, $|S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y-x|$.

c. Montrer alors que la fonction S est continue sur $]0; +\infty[$.

- a. Montrer, pour tout couple (x, y) de $(0; +\infty[)^2$ tel que $x \neq y$:
$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$
.

b. En déduire que la fonction S est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

c. Préciser les valeurs de $S'(0)$ et de $S'(1)$.

- On admet que S est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, S''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}.$$

Montrer que S est concave.

- Soit $x \in]0; +\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$\forall t \in]1; +\infty[, \varphi(t) = \frac{1}{t-t+x}.$$

a. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge et calculer sa valeur.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(n)$,

et en déduire : $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$.

c. Conclure : $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x$.

- a. Dresser le tableau de variation de S , en précisant la limite de S en $+\infty$.

b. Tracer l'allure de la courbe représentative de S .

Premier problème

I- Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. En appliquant la définition de la suite : $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X(2X) - 1 = 4X^2 - 1$ et $T_3 = 2X \underbrace{(4X^2 - 1)}_{T_2} - \underbrace{2X}_{T_1} = 8X^3 - 4X$

2. a. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition :

$$\mathcal{P}(n) = \text{"Le monôme de plus haut degré de } T_n \text{ est } 2^n X^n \text{"}$$

La proposition est clairement vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ puisque $T_0 = 1 = 2^0 X^0$ et $T_1 = 2X = 2^1 X^1$. Soit n un entier naturel quelconque ≥ 1 et fixé ; Supposons que la proposition $\mathcal{P}(k)$ soit vraie pour tout entier naturel $k \leq n$; Ce qui signifie que pour tout $k \leq n$, il existe un polynôme U_k de degré strictement inférieur à k tel que $T_k = 2^k X^k + U_k$. Et puisque $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies, on a $T_{n+1} = 2X \underbrace{(2^n X^n + U_n)}_{T_n} - \underbrace{(2^{n-1} X^{n-1} + U_{n-1})}_{T_{n-1}}$

c'est à dire : $T_{n+1} = 2^{n+1} X^{n+1} + (2XU_n - 2^{n-1} X^{n-1} - U_{n-1})$.

Posons alors $U_{n+1} = 2XU_n - 2^{n-1} X^{n-1} - U_{n-1}$: On a $\deg(U_{n+1}) \leq \max(\deg(2XU_n), \deg(2^{n-1} X^{n-1}), \deg(U_{n-1})) < \max(1 + (n-1), n-1, n-1)$ donc $\deg(U_{n+1}) < n$ et $T_{n+1} = 2^{n+1} X^{n+1} + U_{n+1}$. Ce qui prouve que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence forte, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n \text{ et son coefficient de degré } n \text{ est } 2^n} \quad (1)$$

b. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition : $\mathcal{Q}(n) = \text{"}T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)\text{"}$. La proposition est clairement vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ puisque $T_0 = 1$ et $T_1 = 2X$. Soit n un entier naturel quelconque ≥ 1 et fixé ; Supposons que la proposition $\mathcal{Q}(k)$ soit vraie pour tout entier naturel $k \leq n$; On a alors :

$$\begin{aligned} T_{n+1}(-X) &= 2(-X)T_n(-X) - T_{n-1}(-X) \\ &= (-1)^{n+1} 2X T_n(X) - (-1)^{n-1} T_{n-1}(X) \\ &= (-1)^{n+1} [2X T_n(X) - T_{n-1}(X)] \\ &= (-1)^{n+1} T_{n+1}(X) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la proposition $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence forte, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)} \quad (2)$$

Conclusion : Si n est pair alors T_n est pair et si n est impair alors T_n est impair.

3. On peut faire quelques essais et s'apercevoir que, pour $n = 0, 1, 2$ et 3 , $T_n(1) = n + 1$. Montrons-le par récurrence : Soit $\mathcal{R}(n) = \text{"}T_n(1) = n\text{"}$. La proposition est clairement vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ puisque $T_0(1) = 1$ et $T_1(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Soit n un entier naturel quelconque ≥ 1 et fixé ; Supposons que la proposition $\mathcal{R}(k)$ soit vraie pour tout entier naturel $k \leq n$; On a alors :

$$T_{n+1}(1) = 2 \cdot 1 T_n(1) - T_{n-1}(1) = 2(n+1) - n = n+2$$

Ce qui prouve que la proposition $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence forte, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_n(1) = n + 1} \quad (3)$$

4. a. On pourrait facilement raisonner par récurrence mais pour changer, utilisons une méthode qui nous fera réviser une autre partie du programme. Posons, pour tout entier naturel : $u_n = T_n(\cos \theta)$; on définirait ainsi une suite numérique récurrente linéaire d'ordre 2 telle que :

$$\begin{cases} u_0 = T_0(\cos \theta) = 1, \\ u_1 = T_1(\cos \theta) = 2 \cos \theta, \\ \forall n \geq 2, u_n = 2 \cos \theta u_{n-1} - u_{n-2} \end{cases}$$

L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est :

$$Z^2 - 2 \cos \theta Z + 1 = 0$$

son discriminant est $\Delta = 4(\cos^2 \theta - 1) = -4 \sin^2 \theta < 0$ car $\theta \in]0; \pi[$. Ses racines sont donc : $Z_1 = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ et $Z_2 = \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}$ (puisque $\theta \in]0; \pi[$, $\sqrt{\sin^2 \theta} = |\sin \theta| = \sin \theta$).

Il existe donc deux constantes réelles A et B telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = A \cos n\theta + B \sin n\theta$. On trouve A et B en résolvant le système :

$$\begin{cases} u_0 = 1 = A \\ u_1 = 2 \cos \theta = A \cos \theta + B \sin \theta \end{cases}$$

Ce qui donne immédiatement : $A = 1$ et $B = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ (On rappelle que $\sin \theta \neq 0$ car $\theta \in]0; \pi[$)

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos n\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin n\theta = \frac{\cos n\theta \sin \theta + \sin n\theta \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$$

En conclusion :

$$\boxed{T_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}} \quad (4)$$

b. Soit $n \geq 1$; Pour tout réel $\theta_k = k \cdot \frac{\pi}{n+1}$ (avec $1 \leq k \leq n$) on a $\theta_k \in]0; \pi[$ et $\sin(n+1)\theta_k = \sin k\pi = 0$ donc, d'après la question précédente, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ $T_n[\cos \theta_k] = 0$. $\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_n$ sont donc n racines réelles de T_n . Elles sont distinctes car la fonction \cos est strictement décroissante sur $]0; \pi[$. T_n étant de degré n d'après la question 2°) a), On en déduit que l'on a là toutes les racines de T_n .

$$\text{Conclusion : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_n \text{ a } n \text{ racines : } \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right), \dots, \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)}$$

c. Pour tout entier $n \geq 1$, T_n est de degré n , de coefficient dominant 2^n et de racines $\cos\left(\frac{\theta}{n+1}\right), \dots, \cos\left(\frac{n\theta}{n+1}\right)$, donc, d'après le théorème de factorisation des polynômes :

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$$

d. En particulier, pour $X = 1$, $T_n(1) = 2^n \prod_{k=1}^n \underbrace{\left(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1}\right)}_{2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}}$, d'où, compte tenu de (3) :

$$n+1 = 2^n \prod_{k=1}^n \left(2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right), \text{ d'où : } \prod_{k=1}^n \left(\sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) = \frac{n+1}{4^n} \text{ c'est à dire :}$$

$$\prod_{k=1}^n \left(\sin \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) = \sqrt{\frac{n+1}{4^n}}$$

5. a. Comme indiqué dans l'énoncé, utilisons la fonction $g : \theta \mapsto \sin \theta T_n(\cos \theta) - \sin(n+1)\theta$. Cette fonction est bien la fonction nulle d'après (4) elle est donc deux fois dérivable sur $]0; \pi[$ avec, successivement :

$$g'(\theta) = \cos \theta T_n'(\theta) - \sin^2 \theta T_n''(\theta) - (n+1) \cos(n+1)\theta$$

$$\underbrace{g''(\theta)}_0 = -\sin \theta T_n'(\cos \theta) - \sin \theta \cos \theta T_n''(\cos \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta T_n'''(\cos \theta) + \dots$$

$$\dots + \sin^3 \theta T_n''(\cos \theta) + (n+1)^2 \underbrace{\sin(n+1)\theta}_{\sin \theta T_n(\cos \theta)}$$

C'est à dire :

$$\underbrace{g''(\theta)}_0 = -\sin \theta [T_n'(\cos \theta) + 3 \cos \theta T_n''(\cos \theta) - \sin^2 \theta T_n'''(\cos \theta) - (n+1)^2 T_n(\cos \theta)]$$

En simplifiant par le réel non nul $(-\sin \theta)$, on en déduit que, pour tout θ de $]0; \pi[$,

$$T_n(\cos \theta) + 3 \cos \theta T_n''(\cos \theta) - \sin^2 \theta T_n'''(\cos \theta) - (n+1)^2 T_n(\cos \theta) = 0$$

c'est à dire :

$$\sin^2 \theta T_n'''(\cos \theta) - 3 \cos \theta T_n''(\cos \theta) + (n^2 + 2n) T_n(\cos \theta) = 0$$

b. On en déduit que, pour tout u de $] -1; 1[$, puisque $\cos \theta$ décrit $] -1; 1[$ lorsque θ décrit $]0; \pi[$,

$$(1 - u^2) T_n'''(u) - 3u T_n''(u) + (n^2 + 2n) T_n(u) = 0$$

D'où enfin :

$$\forall u \in] -1; 1[, (u^2 - 1) T_n'''(u) + 3u T_n''(u) - (n^2 + 2n) T_n(u) = 0$$

Le polynôme $(X^2 - 1) T_n''' + 3X T_n'' - (n^2 + 2n) T_n$ a donc une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1) T_n''' + 3X T_n'' - (n^2 + 2n) T_n = 0$$

II- 1. On note déjà que si P est un élément de E alors P' et P'' sont des éléments de E donc $L(P)$ est aussi un élément de E . Deplus, si P et Q sont des éléments de E et si k est un réel alors

$$\begin{aligned} L(kP + Q) &= (X^2 - 1)(kP'' + Q'') + 3X(kP' + Q') \\ &= k[(X^2 - 1)P'' + 3XP'] + (X^2 - 1)Q'' + 3XQ' \\ &= kL(P) + L(Q) \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que L est un endomorphisme de E

2. a. Pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$, $L(T_k) = (X^2 - 1)T_k'' + 3XT_k'$ donc, d'après I-5-b,

$$L(T_k) = (k^2 + 2k)T_k$$

b. Aucun des polynômes T_k n'étant nuls, on en déduit que $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ T_k est un vecteur propre de L associé à la valeur propre $k^2 + 2k$.

Les nombres $k^2 + 2k$ étant tous distincts lorsque k décrit $\{0, 1, \dots, n\}$ (par exemple parce que l'application $t \mapsto t^2 + 2t$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+), on en déduit que L a $(n+1)$ valeurs propres distinctes et puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n+1$, il est donc diagonalisable; le sous-espace propre associé à la valeur propre $k^2 + 2k$ étant $\text{vect}\{T_k\}$ (donc de dimension 1).

III- 1. Soient P, Q et R trois éléments de E et k un réel. D'une part $\varphi(P, Q)$ est bien un réel (II s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur $[-1; 1]$), d'autre part

$$\begin{aligned} \varphi(kP + Q, R) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} (kP(x) + Q(x)) R(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} (kP(x)R(x) + Q(x)R(x)) dx \\ &= k \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x)R(x) dx + \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} Q(x)R(x) dx \\ &= k\varphi(P, R) + \varphi(Q, R) \end{aligned}$$

$$\text{et } \varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x)Q(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} Q(x)P(x) dx = \varphi(Q, P)$$

φ est donc une forme bilinéaire symétrique sur E et $\varphi(P, P) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P^2(x) dx \geq 0$ car

c'est l'intégrale d'une fonction positive et continue sur $[-1; 1]$. Enfin, si $\varphi(P, P) = 0$ alors $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P^2(x) dx = 0$ or l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment n'est nulle que si cette fonction est nulle sur ce segment; ce qui signifie ici que $\forall x \in [-1; 1] \sqrt{1-x^2} P^2(x) = 0$ donc $\forall x \in] -1; 1[P^2(x) = 0$ donc P est nul sur $] -1; 1[$, il a donc une infinité de racine : c'est donc le polynôme nul. Conclusion : $(\varphi(P, P) = 0) \Rightarrow (P = 0)$

Tous ces résultats nous démontrent bien que

$$\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E$$

2. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 u : x \mapsto u(x) &= -(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x) \text{ et } Q \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } [-1;1], \\
 u'(x) &= 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P'(x) - (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P''(x) = (1-x^2)^{\frac{3}{2}}[3xP'(x) - (1-x^2)P''(x)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(L(P), Q) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}[L(P)](x)Q(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}[(x^2-1)P''(x) + 3xP'(x)]Q(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}[-(1-x^2)P''(x) + 3xP'(x)]Q(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 u'(x)Q(x) dx \\
 &= u(1)Q(1) - u(-1)Q(-1) - \int_{-1}^1 u(x)Q'(x) dx \\
 &= - \int_{-1}^1 -(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x) dx
 \end{aligned}$$

C'est à dire :

$$\boxed{\varphi(L(P), Q) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x) dx}$$

Par le même calcul et en échangeant les rôles de P et Q , on trouverait :

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}Q'(x)P'(x) dx = \varphi(L(Q), P); \text{ on a donc bien :}$$

$$\boxed{\varphi(L(P), Q) = \varphi(P, L(Q))}$$

3. L est donc un endomorphisme symétrique de E . On sait alors que des vecteurs propres de L associés à des valeurs propres distinctes formeront toujours une famille libre orthogonale ; c'est le cas de $\{T_0, \dots, T_n\}$ qui est donc une famille libre et orthogonale ; puisqu'elle contient $n+1$ éléments de E qui est de dimension $n+1$, on en conclut que

$$\boxed{\{T_0, \dots, T_n\} \text{ est une base orthogonale de } E}$$

Deuxième problème

I- 1. La fonction à intégrer est clairement continue sur $[0; \pi]$, on effectue alors une intégration par parties en posant $u(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $v(t) = \frac{1}{n} \sin(nt)$, on définit des fonctions de classe C^1 sur $[0; \pi]$ et :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt) dt &= \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \left(\frac{1}{n} \sin(nt)\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin(nt) dt \\
 &= -\frac{1}{n} \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin(nt) dt
 \end{aligned}$$

De la même façon, on effectue une intégration par parties en posant $u_1(t) = \frac{t}{\pi} - 1$ et $v_1(t) = -\frac{1}{n} \cos(nt)$, on définit des fonctions de classe C^1 sur $[0; \pi]$ et :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin(nt) dt &= \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \left(-\frac{1}{n} \cos(nt)\right)\right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \cos(nt) dt \\
 &= -\frac{1}{n} + 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}}$$

2. De façon classique, aucun des dénominateurs des fractions suivantes n'étant nuls car $t \in]0, \pi[$,

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} &= \frac{e^{im\frac{t}{2}}(e^{-imt/2} - e^{imt/2})}{e^{i\frac{t}{2}}(e^{-it/2} - e^{it/2})} \\
 &= \frac{-2i \sin(mt/2)}{-2i \sin(t/2)} e^{i(m-1)\frac{t}{2}} \\
 &= \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} e^{i(m-1)\frac{t}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Finalement } \boxed{\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} e^{i(m+1)\frac{t}{2}}}$$

On a alors : $\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \sum_{n=1}^m \operatorname{Re}(e^{int}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^m (e^{it})^n\right)$ et en utilisant les propriétés des suites géométriques de raison différente de 1 :

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \operatorname{Re}\left(e^{it} \frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} e^{i(m+1)\frac{t}{2}}\right)$$

$$\text{En conclusion : } \boxed{\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\sin(m\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \cos(m+1)\frac{t}{2}}$$

3. Soit $v : t \mapsto -\frac{1}{\lambda} \cos(\lambda t)$, u et v sont de classe C^1 et $v'(t) = \sin(\lambda t)$ donc avec une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt &= u(\pi)v(\pi) - u(0)v(0) + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi u'(t) \cos(\lambda t) dt \\
 &= -\frac{u(\pi)}{\lambda} \cos(\lambda\pi) + \frac{u(0)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi u'(t) \cos(\lambda t) dt
 \end{aligned}$$

Or, pour tout $\lambda > 0$, $\left| -\frac{u(\pi)}{\lambda} \cos(\lambda\pi) + \frac{u(0)}{\lambda} \right| \leq \frac{|u(\pi) + u(0)|}{\lambda}$

On en déduit que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -\frac{u(\pi)}{\lambda} \cos(\lambda\pi) + \frac{u(0)}{\lambda} = 0$ par le théorème d'encadrement des limites. De même $\left| \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi u'(t) \cos(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi |u'(t) \cos(\lambda t)| dt \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi |u'(t)| dt$; puisque $\int_0^\pi |u'(t)| dt$ est un réel indépendant de λ , on en déduit que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi |u'(t)| dt = 0$. Finalement, on a bien

$$\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt = 0}$$

4. Nous allons appliquer ici le théorème mal nommé du « prolongement des fonctions de classes $C^1 \gg$:

- i. f est C^1 sur $]0; \pi[$ comme quotient de deux fonctions C^1 sur $]0; \pi[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. En effet, sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, la fonction \sin ne s'annule pas donc sur $]0; \pi[$, la fonction $t \mapsto \sin t$ ne s'annule pas non plus.
- ii. f est continue en 0; en effet d'une part $\frac{t^2}{2\pi} - t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t$, d'autre part $2 \sin \frac{t}{2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ donc $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -1$. Ainsi $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = -1 = f(0)$. D'où la continuité de f en 0 et donc sur $]0; \pi[$ (puisque, f étant C^1 sur $]0; \pi[$, est aussi continue sur $]0; \pi[$).
- iii. Enfin f' a une limite en 0^+ ; En effet :

$$\begin{aligned} \forall t \in]0; \pi[, f'(t) &= \frac{(\frac{t}{\pi} - 1) \sin \frac{t}{2} - (\frac{t^2}{2\pi} - t) \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \\ &= \frac{(\frac{t}{\pi} - 1)(\frac{t}{2} + o(t^2)) - \frac{1}{2}(\frac{t^2}{2\pi} - t)(1 - \frac{t^2}{4} + o(t^2))}{\frac{t^2}{2} + o(t^2)} \\ &= \frac{-\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2\pi} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4\pi} + o(t^2)}{\frac{t^2}{2} + o(t^2)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{4\pi}}{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

c'est à dire $f'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\pi}$. D'où enfin :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = \frac{1}{2\pi}} \text{ De ces trois points, on déduit de ce théorème que :}$$

$$\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ sur }]0; \pi[\text{ et } f'(0) = \frac{1}{2\pi}}$$

5. a) En utilisant la question 1, la question 2 et la linéarité de l'intégration, on écrit :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^m \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt \\ &= \int_0^\pi \sum_{n=1}^m \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sum_{n=1}^m \cos(nt) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{\sin(m\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \cos(m+1)\frac{t}{2} dt \\ &= \int_0^\pi f(t) \underbrace{2 \sin(m\frac{t}{2}) \cos(m+1)\frac{t}{2}}_{\sin(2m+1)\frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt - \int_0^\pi \underbrace{f(t) \sin \frac{t}{2}}_{\frac{1}{2}(\frac{t^2}{2\pi} - t)} dt \\ &= \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt - \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi \\ &= \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt + \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

b) f étant de classe C^1 d'après la question 4, nous savons d'après la question 3 (avec $u = f$ et $\lambda = \frac{(2m+1)t}{2}$) que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt = 0$. Il s'en suit que $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2}$ a une limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ (mais nous le savions déjà par un théorème sur les séries de référence...) et que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

II- 1. a) Clairement : pour tout couple (x, y) de $(]0; +\infty[)^2$, la série de terme général $\frac{1}{(n+x)(n+y)}$ est à termes positifs et $\frac{1}{(n+x)(n+y)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, le critère d'équivalence des séries à termes positifs permet d'affirmer que la série $\sum \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ converge. Un raisonnement analogue permet d'affirmer de même que la série $\sum \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ converge.

b) $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) = x \sum \frac{1}{n(n+x)}$ donc la série converge d'après 1°)a) avec $y = 0$.

$$2. S(0) = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) = 0 \text{ et } \forall N \in \mathbb{N}^* \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

ainsi, $S(1) = \lim_{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$.

3. a. Puisque toutes les séries en présence sont convergentes, on peut écrire : $\forall(x, y)$ de $([0; +\infty[)^2$

$$\begin{aligned} S(y) - S(x) &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y} \right) - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+y} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{y-x}{(n+x)(n+y)} \\ &= (y-x) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \end{aligned}$$

b. On en déduit, puisque x et y sont positifs :

$$|S(y) - S(x)| = |(y-x)| \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \leq |y-x| \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ et donc, d'après I-5°-b) :}$$

$$\boxed{|S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y-x|}$$

c. Soit x_0 un réel positif fixé. D'après ce qui précède, pour tout réel positif y :

$$0 \leq |S(y) - S(x_0)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y - x_0|$$

or le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 lorsque y tend vers x_0 , ainsi, par le théorème d'encadrement des limites : $\lim_{y \rightarrow x_0} |S(y) - S(x_0)| = 0$ et donc $\lim_{y \rightarrow x_0} S(y) = S(x_0)$.

C'est la preuve que S est continue en x_0 . Ceci étant vrai pour tout x_0 de \mathbb{R}^+ , on peut en déduire que S est continue sur \mathbb{R}^+ .

4. a. En reprenant 3°a) : $\forall(x, y)$ de $([0; +\infty[)^2$ $\frac{|S(y) - S(x)|}{|y-x|} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$ Donc,

puisque toutes les séries en présence sont convergentes :

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| &= \left| \sum_{n \geq 1} \left[\frac{1}{(n+x)(n+y)} - \frac{1}{(n+x)^2} \right] \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \left| \frac{(n+x) - (n+y)}{(n+x)^2(n+y)} \right| \\ &\leq |y-x| \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \\ &\leq |y-x| \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

(x et y étant positifs).

b. Pour x fixé dans \mathbb{R}^+ , faisant tendre y vers x dans le membre de droite de l'inégalité précédente, le théorème d'encadrement des limites permet d'affirmer que :

$$\lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| = 0 \text{ et donc } \lim_{y \rightarrow x} \frac{S(y) - S(x)}{y-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}. \text{ C'est la}$$

preuve que la fonction S est dérivable en tout x de \mathbb{R}^+ avec :

$$\boxed{S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}}$$

c. En remplaçant dans l'égalité précédente x par 0, il vient immédiatement, d'après I-5°)b) :

$$\boxed{S'(0) = \frac{\pi^2}{6}}. \text{ De même, avec } x = 1 : S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ c'est à dire :}$$

$$\boxed{S'(1) = \frac{\pi^2}{6} - 1}$$

5. Clairement, la série donnant $-S''(x)$ est convergente et à terme positifs, donc $S'' \leq 0$ et donc S est concave. (en notant tout de même que pour être tout à fait en règle avec le programme officiel, il aurait fallu admettre que S soit de classe C^2 sur \mathbb{R}^+)

6. a) Soit $A > 1$ la fonction φ est une fonction rationnelle sur $[1; +\infty[$, elle est continue sur

$[1, A]$ et l'intégrale $\int_1^A \varphi(t) dt$ existe et vaut :

$$[\ln(t) - \ln(t+x)]_1^A = \ln(A) - \ln(A+x) - \ln 1 + \ln(1+x) = \ln\left(\frac{A}{A+x}\right) + \ln(1+x)$$

or $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A}{A+x} = 1$ donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{A}{A+x}\right) = 0$, ainsi : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \varphi(t) dt$ existe et vaut $\ln(1+x)$:

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt = \ln(1+x)}$$

b) Si $t \geq 1$ $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+x)^2} < 0$. Donc φ est décroissante sur $[1; +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [n; n+1]$, $\varphi(n+1) \leq \varphi(t) \leq \varphi(n)$. On peut alors intégrer cet encadrement sur $[n, n+1]$, les bornes étant "dans le bon sens" :

$\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(n)$, et pour $N \in \mathbb{N}^*$, sommons cet encadrement pour n variant de 1 à N :

$$\sum_{n=1}^N \varphi(n+1) \leq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=1}^N \varphi(n)$$

c'est à dire, par la "relation de Chasles" :

$$\sum_{n=1}^N \varphi(n+1) \leq \int_1^{N+1} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=1}^N \varphi(n)$$

d'où :

$$\sum_{n=2}^{N+1} \varphi(n) \leq \int_1^{N+1} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=1}^N \varphi(n)$$

Les trois membres de cet encadrement convergent lorsque N tend vers $+\infty$ donc :

$$S(x) - \varphi(1) \leq \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x)$$

ou encore :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt}$$

(car $\varphi(1) = 1 - \frac{1}{1+x} \leq 1$)

c) En utilisant le résultat de 6°)a) :

$$\ln(1+x) \leq S(x) \leq 1 + \ln(1+x)$$