Mathématiques voies S et E

Corrigés des épreuve de mathématiques s voies scientifique et

François Delaplace *(voie E),* **Pierre Girard** *(voie S)*
Professeurs de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Notre-Dame du

Voie scientifique

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : EM LYON

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLÈME I

Préliminaires

1.a. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t^n \mathrm{e}^{-t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On admet dans tout le problème : $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

On note, dans tout le problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

3.a. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

b. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1} = 0$.

c. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$.

1/4

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

s 2006 pécifiques à l'EM Lyon, économique

Grandchamp (Versailles).

I Recherche d'extrémums locaux pour une fonction de deux variables réelles

On note $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $F(x,y) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2$.

2. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, et en déduire les trois points critiques de F.

3. Déterminer les extrémums locaux de F. En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de F en chacun de ces points.

II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

On note $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Établir, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\left|\sin(a+\lambda) - \sin a - \lambda\cos a\right| \leqslant \dfrac{\lambda^2}{2}$.
On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

3.a. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

b. En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = C(x)$.

4.a. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}S(x)$.

b. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $2\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

c. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $S(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$ et $C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

III Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2.a. Montrer, pour tout $u \in [0\,;+\infty[$: $0 \leqslant (1-u+u^2) - \dfrac{1}{1+u} \leqslant u^3$.

b. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2t^2 + x^4t^4)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - g(x) \leqslant \frac{15\sqrt{\pi}}{8}x^6$.

3. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

IV Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\displaystyle u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\displaystyle 0 \leqslant u_p \leqslant \frac{I_{2p}}{(2p)!}$.

En déduire que la série de terme général u_p est convergente.

Problème II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère un n-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ et le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$.

On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P.

On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

On note id l'application identité de $\mathbb{C}^n$ et on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que C soit la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}_0$.

On note $f^0 = \mathrm{id}$ et, pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1.a. Exprimer, pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1}.

b. En déduire : $\forall j \in [\![1; n-1]\!]$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \cdots + a_{n-1}e_n)$.

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1f + a_0\mathrm{id}$.

a. Vérifier : $g(e_1) = 0$.

b. Montrer : $\forall i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.

c. En déduire : $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $g(e_i) = 0$.

d. Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f.

Application 1 : Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + \mathrm{I}_5$.

e. Établir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P.

3.a. Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1X + \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$. On note $Q(f)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $Q(f) = \alpha_0\,\mathrm{id} + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1}f^{n-1}$. Calculer $Q(f)(e_1)$.

b. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur de f.

c. Soit λ une racine du polynôme P.
Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X-\lambda)R$.
Vérifier que $(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ R(f) = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$.

d. Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C.

4.a. Montrer que, pour tout nombre complexe x, la matrice $(C - x\mathrm{I}_n)$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$. En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.

b. En déduire que C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.

5.a. *Application* 2 : Montrer que la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

b. *Application* 3 : Montrer que la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.

6. On note $B = {}^tC$ la matrice transposée de C.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe t, la matrice $(B - t\,\mathrm{I}_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - t\,\mathrm{I}_n)$ est inversible.

b. En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.

c. Soit λ une valeur propre de B. Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ.

d. On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que B est diagonalisable et en déduire que la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible.

7. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ deux à deux distinctes.
L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

a. Soit $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.

b. Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\big)$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1.

Problème I

Préliminaires

1. a. On sait que pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, $t^\alpha = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{\beta t})$, c'est ce qu'on appelle naïvement les « croissances comparées » ; En particulier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $T^{\frac{n+2}{2}} = \underset{T\to+\infty}{o}(e^T)$ ce qui s'écrit : $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{T^{\frac{n+2}{2}}}{e^T} = 0$. En posant $t = \sqrt{T}$, on obtient donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^{n+2}}{e^{t^2}} = 0$, c'est à dire

$$\boxed{t^n e^{-t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)}$$

b. Les fonctions $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ étant continues et positives sur $[1, +\infty[$, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ étant convergente (coefficient > 1) et $t^n e^{-t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ (d'après la question précédente), on peut donc déduire du critère de négligeabilité des intégrales impropres que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$ est convergente. Le changement de variable $u = -t$ appliqué à l'intégrale convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$ prouve que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} t^n e^{-t^2}\,dt$ est convergente ; enfin, par continuité de la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ sur $[-1; +1]$, on sait que $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^n e^{-t^2}\,dt$ existe. On déduit de tout cela que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt \text{ converge}}$$

2. On vient de montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2}\,dt$ converge. Soit alors n un entier naturel et $(a_0, \dots, a_n)$ une suite de réels, on déduit de ce qui précède que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right) e^{-t^2}\,dt$ converge. Ceci prouve que si P est un polynôme à coefficients réels, alors

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2}\,dt \text{ converge}}$$

3. a. Soient A et B deux réels, on intègre par parties $\displaystyle\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2}\,dt$ en utilisant les deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:
$u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto \left(-\dfrac{1}{2}\right) e^{-t^2}$ dont les dérivées sont : $u' : t \mapsto (n+1)t^n$ et $v' : t \mapsto te^{-t^2}$, on obtient immédiatement : $\displaystyle\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2}\,dt = \frac{-B^{n+1}e^{-B^2} + A^{n+1}e^{-A^2}}{2} + \frac{n+1}{2}\int_A^B t^n e^{-t^2}$ En utilisant le résultat du 1°a), et le résultat du 1°b) on voit que l'on peut faire tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n \text{ converge}}$$

b. Soit p un entier naturel et soit A un réel strictement positif, la fonction $t \mapsto t^{2p+1}e^{-t^2}$ est continue et impaire sur $[-A, +A]$ donc $\displaystyle\int_{-A}^{A} t^{2p+1} e^{-t^2}\,dt = 0$ et puisque cette intégrale a pour limite I_{2p+1} lorsque A tend vers $+\infty$, on en déduit que :

$$\boxed{I_{2p+1} = 0}$$

4. Par récurrence bien sûr ! La propriété est vrai pour $p = 0$ car c'est l'énoncé qui le dit... Supposons-la vraie pour un entier p quelconque, fixé et positif, on a alors :
$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2} I_{2p} = \dfrac{(2p+1)}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi} = \dfrac{(2p+2)(2p+1)}{2}\dfrac{(2p)!}{2(p+1)2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$
C'est à dire $I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \dfrac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!}\sqrt{\pi} = \dfrac{[2(p+1)]!}{2^{2(p+1)}(p+1)!}\sqrt{\pi}$. La propriété est donc vraie au rang $(p+1)$.
Le théorème de récurrence permet donc de conclure que, pour tout entier naturel p,

$$\boxed{I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}}$$

Partie I

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, $(t-x)^2(t-y)^2 = t^4 - 2(x+y)t^3 + (x^2+4xy+y^2)t^2 - 2xy(x+y)t + x^2y^2$
donc $(t-x)^2(t-y)^2e^{-t^2} = t^4e^{-t^2} - 2(x+y)t^3e^{-t^2} + (x^2+4xy+y^2)t^2e^{-t^2} - 2xy(x+y)te^{-t^2} + x^2y^2e^{-t^2}$
et en intégrant les deux membres par rapport à la variable t, sachant que toutes les intégrales convergent d'après la question 2°) des préliminaires, on obtient :
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2e^{-t^2}\,dt = I_4 - 2(x+y)I_3 + (x^2+4xy+y^2)I_2 - 2xy(x+y)I_1 + x^2y^2I_0$ On peut alors utiliser le résultat de la question 3°)c) des préliminaires, cela donne :
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2e^{-t^2}\,dt = \left[\frac{3}{4} - 2(x+y)0 + (x^2+4xy+y^2)\frac{1}{2} - 2xy(x+y)0 + x^2y^2\right]\sqrt{\pi}$
c'est à dire :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2e^{-t^2}\,dt = \left[\frac{3}{4} + (x^2+4xy+y^2)\frac{1}{2} + x^2y^2\right]\sqrt{\pi}}$$

2. D'après ce qui précède, F est une fonction polynôme ; elle est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et elle a donc des fonctions dérivées partielles d'ordre 1 qui sont :
$\dfrac{\partial F}{\partial x} : (x,y) \mapsto x + 2y + 2xy^2$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y} : (x,y) \mapsto 2x + y + 2x^2y$

3. On sait que, F étant de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, tout extremum de F ne pourra être obtenu qu'en un point critique de F. On est donc amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 2xy^2 &= 0 \\ 2x + y + 2x^2y &= 0 \end{cases}$$

On constate que dans ce système, $(x = 0) \Leftrightarrow (y = 0)$ et que $(x, y) = (0, 0)$ est une solution particulière de ce système. On cherche les autres solutions de ce système, c'est à dire qu'on suppose maintenant que $x \neq 0$ et $y \neq 0$; En multipliant la première ligne par x et la seconde par y on

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x^2+2xy+2x^2y^2 &= 0 \quad (L_1)\\ 2xy+y^2+2x^2y^2 &= 0 \quad (L_2)\end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} x^2+2xy+2x^2y^2 &= 0 \quad (L_1)\\ x^2 &= y^2 \quad (L_2-L_1)\end{cases}$$

On note alors qu'on ne peut avoir $x=y$ car sinon (L_1) devient $x^2(3+2x^2)=0$ qui n'est pas possible pour $x\neq 0$ Un système équivalent est donc :

$$\begin{cases} x^2+2xy+2x^2y^2 &= 0 \quad (L_1)\\ x &= -y \quad (L_2-L_1)\end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} -x^2+2x^4 &= 0 \quad (L_1)\\ x &= -y \quad (L_2-L_1)\end{cases}$$

et puisque $x\neq 0$:

$$\begin{cases} x^2 &= \dfrac{1}{2} \quad (L_1)\\ x &= -y \quad (L_2-L_1)\end{cases}$$

les points critiques de F sont donc, en rajoutant la solution $(0,0)$:

$$\boxed{(0,0);(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}});(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}$$

F étant de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, on sait que l'on peut tester si ces points sont des abscisses d'extrema en calculant le célèbre « $rt-s^2$ »où, en tout point (x,y) on a :
$r=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)=1+2y^2,\ s=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=2+4xy; t=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)=1+2x^2.$
On peut résumer les résultats dans un tableau :

	r	s	t	$rt-s^2$
(0,0)	1	2	1	-1
$(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$	2	0	2	4
$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$	2	0	2	4

Compte tenu du signe de $rt-s^2$ et du signe de r, on déduit que $(0,0)$ est un point selle de F et que :

$\boxed{F \text{ présente un minimum local en } (\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ et en } (-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ dont la valeur commune est } \frac{1}{2}}$

Partie II

1. Pour tout réel x, les fonctions $t\mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$ et $t\mapsto t\cos(xt)e^{-t^2}$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et $\forall t\in\mathbb{R}^+, |\sin(xt)e^{-t^2}|\leqslant e^{-t^2}$ et $|t\cos(xt)e^{-t^2}|\leqslant te^{-t^2}$. Mais d'après le 2°) des préliminaires, on sait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ convergent, donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} te^{-t^2}\,dt$ convergent. Le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives et continues permet alors de conclure que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(xt)e^{-t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(xt)e^{-t^2}\,dt$ convergent absolument et sont donc convergentes.

2. Soit $a\in\mathbb{R}$; Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h: t\mapsto \sin(a+t)$. Cette fonction est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $|h"(t)|=|-\sin(a+t)|\leqslant 1$; on peut donc appliquer, pour tout réel λ la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour h entre 0 et λ : $|g(\lambda)-g(0)-g'(0).\lambda)|\leqslant 1.\dfrac{|\lambda-0|^2}{2}$, c'est à dire :

$$\boxed{|\sin(a+\lambda)-\sin(a)-\cos(a).\lambda)|\leqslant\frac{\lambda^2}{2}}$$

3. a. $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall h\in\mathbb{R}$, appliquons ce résultat en remplaçant a par xt et λ par xh ; on obtient : $|\sin((x+h)t)-\sin(xt)-ht\cos(xt)|\leqslant\dfrac{x^2h^2}{2}$ et puisque toutes les intégrales convergent :

$$\begin{aligned}|S(x+h)-S(x)-hC(x)| &= |\int_0^{+\infty}\sin((x+h)t)\,e^{-t^2}\,dt-\int_0^{+\infty}\sin(xt)e^{-t^2}\,dt-\int_0^{+\infty}ht\cos(xt)e^{-t^2}\,dt|\\ &= |\int_0^{+\infty}[\sin((x+h)t)-\sin(xt)-ht\cos(xt)]\,e^{-t^2}\,dt|\\ &\leqslant \int_0^{+\infty}|\sin((x+h)t)-\sin(xt)-ht\cos(xt)|e^{-t^2}\,dt\\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\frac{x^2h^2}{2}e^{-t^2}\,dt \text{ (cette intégrale converge bien !)}\\ &\leqslant \frac{x^2h^2\sqrt{\pi}}{4}\end{aligned}$$

Ainsi, pour $h\neq 0$: $\left|\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}-C(x)\right|\leqslant\dfrac{x^2|h|\sqrt{\pi}}{4}$, ce qui prouve, par le théorème d'encadrement des limites, que :

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}-C(x)=0}$$

b. Bien sûr, il s'en suit que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}=C(x)$; la fonction S est donc dérivable en tout réel x avec :

$$\boxed{S'(x)=C(x)}$$

4. a. Intégrons par parties l'intégrale $C(x)$ à l'aide des fonctions de classe C^1 $u: t\mapsto -\dfrac{1}{2}e^{-t^2}$ et $v: t\mapsto\cos(xt)$, cela donne : $\forall A\in\mathbb{R}^+$,
$\displaystyle\int_0^A t\cos(xt)e^{-t^2}\,dt=\int_0^A u'(t)v(t)\,dt=[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\cos(xt)]_0^A-\frac{x}{2}\int_0^A\sin(xt)e^{-t^2}\,dt$
La fonction $t\mapsto e^{-t^2}$ a pour limite 0 en $+\infty$ et la fonction $t\mapsto\cos(xt)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\lim_{A\to+\infty}e^{-t^2}\cos(xt)=0$$

Les intégrales dans les deux membres ont des limites lorsque $A\to\infty$ d'après II.1., on obtient donc :

$$\int_0^{+\infty}t\cos(xt)e^{-t^2}\,dt=[\frac{1}{2}e^0\cos(0)]-\frac{x}{2}\int_0^{+\infty}\sin(xt)e^{-t^2}\,dt$$

c'est à dire :

$$C(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}S(x)$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.

b. La fonction $x \mapsto 2e^{\frac{x^2}{4}}S(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$\begin{aligned} x \mapsto 2e^{\frac{x^2}{4}}\left(\frac{x}{2}S(x)+S'(x)\right) &= 2e^{\frac{x^2}{4}}\left(\frac{x}{2}S(x)+C(x)\right) \\ &= 2e^{\frac{x^2}{4}}\left(\frac{x}{2}S(x)+\frac{1}{2}-\frac{x}{2}S(x)\right) \\ &= 2e^{\frac{x^2}{4}}\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{x^2}{4}} \end{aligned}$$

Ce que l'on peut résumer sous la forme

$$\left(2e^{\frac{t^2}{4}}S(t)\right)' = e^{\frac{t^2}{4}}$$

Les fonctions dans étant continues sur $\mathbb{R}$, on peut les intégrer sur $[0,x]$ pour x fixé dans $\mathbb{R}^+$. Cela donne :

$$2e^{\frac{x^2}{4}}S(x) - 2e^{\frac{0^2}{4}}\underbrace{S(0)}_{=0} = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt$$

Soit enfin $\boxed{2e^{\frac{x^2}{4}}S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt}$

c. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$, on obtient : $\boxed{S(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt}$

et en reportant dans l'égalité du 4.a. : $\boxed{C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt}$

Partie III

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, 0 \leqslant \frac{1}{1+x^2t^2} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2} \leqslant e^{-t^2}$, les fonctions $t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge d'après le préliminaire ; ainsi, le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives et continues permet de conclure que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}\,dt$ converge.

2. a. $\forall u \in \mathbb{R}^+, (1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} = \frac{u^3}{1+u}$; or $0 \leqslant \frac{1}{1+u} \leqslant 1$ donc :

$$\boxed{0 \leqslant (1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} \leqslant u^3}$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, x^2t^2 \geqslant 0$; en en déduit immédiatement en posant $u = x^2t^2$ et en multipliant les 3 membres de l'inégalité par e^{-t^2} que :
$0 \leqslant (1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2} - \frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2} \leqslant x^6t^6e^{-t^2}$. Mais les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty}(1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^6t^6e^{-t^2}\,dt$ convergent d'après le préliminaire et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}\,dt$ converge d'après la question précédente. On peut donc intégrer l'encadrement sans changer le sens des inégalités, ce qui donne :

$0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}(1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}\,dt \leqslant x^6\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}t^6e^{-t^2}\,dt}_{I_6}$ c'est à dire, compte tenu du 3.c. du préliminaire : $\boxed{0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}(1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\,dt - g(x) \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}x^6}$

3. Et puisque toutes les intégrales en présence sont convergentes, on obtient en utilisant la linéarité de l'intégration :
$0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt - x^2\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}\,dt + x^4\int_{-\infty}^{+\infty}t^4e^{-t^2}\,dt - g(x) \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}x^6$, c'est à dire :
$0 \leqslant I_0 - x^2I_2 + x^4I_4 - g(x) \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}x^6$ ou encore : $0 \leqslant \sqrt{\pi}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{4}\right) - g(x) \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}x^6$.
On divise alors, pour $x \neq 0$ les trois membres de cet encadrement par $|x^5|$ et on obtient

$$0 \leqslant \left|\frac{\sqrt{\pi}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{4}\right) - g(x)}{x^5}\right| \leqslant \frac{15}{8}\sqrt{\pi}|x|$$

il s'en suit que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\pi}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{4}\right) - g(x)}{x^5} = 0$ que l'on peut écrire :

$$\sqrt{\pi}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{4}\right) - g(x) = o(x^5)$$

ou enfin

$$\boxed{g(x) = \sqrt{\pi}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{4}+0.x^5\right) + o(x^5)}$$

qui est, par définition, **le** développement limité à l'ordre 5 de g en 0.

Partie IV

1. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, (2p)! \leqslant t^2 + (2p)!$ donc $0 \leqslant \frac{1}{t^2+(2p)!} \leqslant \frac{1}{(2p)!}$ et puisque $t^{2p} \geqslant 0$:
$0 \leqslant \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{(2p)!}t^{2p}e^{-t^2}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2}$ et $t \mapsto t^{2p}e^{-t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}t^{2p}e^{-t^2}\,dt$ converge d'après les préliminaires. Donc, d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives et continues, $\boxed{\text{l' intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty}t^{2p}e^{-t^2}\,dt \text{ converge}}$

2. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{(2p)!}t^{2p}e^{-t^2}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2}$ et $t \mapsto t^{2p}e^{-t^2}$ étant continues sur $\mathbb{R}$ et leurs intégrales sur $\mathbb{R}$ étant convergentes, on en déduit que :
$0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{(2p)!}\int_{-\infty}^{+\infty}t^{2p}e^{-t^2}\,dt$ d'où enfin : $\boxed{0 \leqslant u_p \leqslant \frac{I_{2p}}{(2p)!}}$. En utilisant le résultat des préliminaires, on en déduit que $0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$ que l'on écrit : $0 \leqslant u_p \leqslant \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^p}{p!}\sqrt{\pi}$.
On utilise alors le fait que la série de terme général $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^p}{p!}$ est convergente (de somme $e^{\frac{1}{4}}$) et le critère de comparaison des séries à termes positifs pour conclure que $\boxed{\sum_{p\geqslant 0}u_p \text{ est convergente}}$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 15 pages.