



Corrigés des épreuves de mathématiques voies scientifique et

François Delaplace (voie E), Pierre Girard (voie S)

Professeurs de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Notre-Dame du

Voie scientifique



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EM LYON

1^{ère} épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLÈME I

Préliminaires

1.a. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t^n e^{-t^2} = \frac{0}{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$ converge.

On admet dans tout le problème : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

On note, dans tout le problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

3.a. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

b. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1} = 0$.

c. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}} \sqrt{\pi}$.

1/4

Référence

s 2006

spécifiques à l'EM Lyon, économique

Grandchamp (Versailles).

I Recherche d'extrêmes locaux pour une fonction de deux variables réelles

On note $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2 y^2$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 , et en déduire les trois points critiques de F .
3. Déterminer les extrêmes locaux de F . En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de F en chacun de ces points.

II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt$ convergent.

On note $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt.$$

2. Établir, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $|\sin(a + \lambda) - \sin a - \lambda \cos a| \leq \frac{\lambda^2}{2}$.

On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

- 3.a. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.
- b. En déduire que S est dérivable sur \mathbb{R} et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = C(x)$.
- 4.a. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x)$.
- b. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $2e^{-\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}} dt$.
- c. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $S(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}} dt$ et $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}} dt$.

III Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$ converge.

On note $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$.

- 2.a. Montrer, pour tout $u \in [0; +\infty[$: $0 \leq (1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3$.
- b. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6$.
3. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

Référence

IV Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$ converge.

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$.

2. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}$.

En déduire que la série de terme général u_p est convergente.

PROBLÈME II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère un n -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de \mathbb{C}^n et le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \dots & (0) & \dots & \dots & -a_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & (0) & \dots & \dots & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $C =$

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P .

On note $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ la base canonique de \mathbb{C}^n .

On note id l'application identité de \mathbb{C}^n et on appelle f l'endomorphisme de \mathbb{C}^n tel que C soit la matrice associée à f relativement à la base \mathcal{B}_0 .

On note $f^0 = \text{id}$ et, pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1.a. Exprimer, pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $f(\epsilon_i)$ en fonction de ϵ_{i+1} .

b. En déduire : $\forall j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $f^j(\epsilon_1) = \epsilon_{j+1}$ et $f^n(\epsilon_1) = -(a_0\epsilon_1 + a_1\epsilon_2 + \dots + a_{n-1}\epsilon_n)$.

2. Soit g l'endomorphisme de \mathbb{C}^n défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0\text{id}$.

a. Vérifier : $g(\epsilon_1) = 0$.

b. Montrer : $\forall i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.

c. En déduire : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $g(\epsilon_i) = 0$.

d. Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f .

Application 1 : Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.

e. Établir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P .

3.a. Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1X + \dots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$. On note $Q(f)$ l'endomorphisme de \mathbb{C}^n défini par $Q(f) = \alpha_0 \text{id} + \alpha_1f + \dots + \alpha_{n-1}f^{n-1}$. Calculer $Q(f)(\epsilon_1)$.

b. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur de f .

c. Soit λ une racine du polynôme P .

Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - \lambda)R$.

Vérifier que $(f - \lambda \text{id}) \circ R(f) = 0$, où 0 est l'endomorphisme nul de \mathbb{C}^n .

d. Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C .

4.a. Montrer que, pour tout nombre complexe x , la matrice $(C - xI_n)$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$. En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.

b. En déduire que C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.

5.a. Application 2 : Montrer que la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

b. Application 3 : Montrer que la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.

6. On note $B = {}^tC$ la matrice transposée de C .

a. Montrer que, pour tout nombre complexe t , la matrice $(B - tI_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - tI_n)$ est inversible.

b. En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.

c. Soit λ une valeur propre de B . Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ .

d. On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que

$$B \text{ est diagonalisable et en déduire que la matrice } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \text{ est inversible.}$$

7. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres μ_1, \dots, μ_n deux à deux distinctes.

L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à μ_1, \dots, μ_n .

a. Soit $a = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une base de E .

b. Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1 .

Problème I

Préliminaires

1. a. On sait que pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, $t^\alpha = o_{t \rightarrow +\infty}(e^{\beta t})$, c'est ce qu'on appelle naïvement les « croissances comparées » ; En particulier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $T^{\frac{n+2}{2}} = o_{T \rightarrow +\infty}(e^T)$ ce qui s'écrit : $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T^{\frac{n+2}{2}}}{e^T} = 0$. En posant $t = \sqrt{T}$, on obtient donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{n+2}}{e^{t^2}} = 0$, c'est à dire

$$\boxed{t^n e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)}$$

- b. Les fonctions $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant continues et positives sur $[1, +\infty[$, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ étant convergente (coefficient > 1) et $t^n e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (d'après la question précédente), on peut donc déduire du critère de négligeabilité des intégrales impropres que $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente. Le changement de variable $u = -t$ appliqué à l'intégrale convergente $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ prouve que $\int_{-\infty}^{-1} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente; enfin, par continuité de la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ sur $[-1; +1]$, on sait que $\int_{-1}^1 t^n e^{-t^2} dt$ existe. On déduit de tout cela que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt \text{ converge}}$$

2. On vient de montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$ converge. Soit alors n un entier naturel et (a_0, \dots, a_n) une suite de réels, on déduit de ce qui précède que $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k\right) e^{-t^2} dt$ converge. Ceci prouve que si P est un polynôme à coefficients réels, alors

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt \text{ converge}}$$

3. a. Soient A et B deux réels, on intègre par parties $\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2} dt$ en utilisant les deux fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R} :
 $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-t^2}$ dont les dérivées sont : $u' : t \mapsto (n+1)t^n$ et $v' : t \mapsto t e^{-t^2}$,

on obtient immédiatement : $\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2} dt = \frac{-B^{n+1} e^{-B^2} + A^{n+1} e^{-A^2}}{2} + \frac{n+1}{2} \int_A^B t^n e^{-t^2} dt$ En utilisant le résultat du 1°a), et le résultat du 1°b) on voit que l'on peut faire tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n \text{ converge}}$$

- b. Soit p un entier naturel et soit A un réel strictement positif, la fonction $t \mapsto t^{2p+1} e^{-t^2}$ est continue et impaire sur $[-A, +A]$ donc $\int_{-A}^A t^{2p+1} e^{-t^2} dt = 0$ et puisque cette intégrale a pour limite I_{2p+1} lorsque A tend vers $+\infty$, on en déduit que :

$$\boxed{I_{2p+1} = 0}$$

4. Par récurrence bien sûr ! La propriété est vraie pour $p = 0$ car c'est l'énoncé qui le dit... Supposons-la vraie pour un entier p quelconque, fixé et positif, on a alors :

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2} I_{2p} = \frac{(2p+1)(2p)!}{2 \cdot 2^{2p} p!} \sqrt{\pi} = \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{2 \cdot (p+1) 2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$$

C'est à dire $I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2} (p+1)!} \sqrt{\pi} = \frac{[2(p+1)]!}{2^{2(p+1)} (p+1)!} \sqrt{\pi}$. La propriété est donc vraie au rang $(p+1)$.

Le théorème de récurrence permet donc de conclure que, pour tout entier naturel p ,

$$\boxed{I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}}$$

Partie I

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, $(t-x)^2(t-y)^2 = t^4 - 2(x+y)t^3 + (x^2 + 4xy + y^2)t^2 - 2xy(x+y)t + x^2y^2$
 donc $(t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} = t^4 e^{-t^2} - 2(x+y)t^3 e^{-t^2} + (x^2 + 4xy + y^2)t^2 e^{-t^2} - 2xy(x+y)t e^{-t^2} + x^2y^2 e^{-t^2}$
 et en intégrant les deux membres par rapport à la variable t , sachant que toutes les intégrales convergent d'après la question 2°) des préliminaires, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt = I_4 - 2(x+y)I_3 + (x^2 + 4xy + y^2)I_2 - 2xy(x+y)I_1 + x^2y^2I_0$$

On peut alors utiliser le résultat de la question 3°c) des préliminaires, cela donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt = \left[\frac{3}{4} - 2(x+y)0 + (x^2 + 4xy + y^2)\frac{1}{2} - 2xy(x+y)0 + x^2y^2 \right] \sqrt{\pi}$$

c'est à dire :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt = \left[\frac{3}{4} + (x^2 + 4xy + y^2)\frac{1}{2} + x^2y^2 \right] \sqrt{\pi}}$$

2. D'après ce qui précède, F est une fonction polynôme ; elle est donc de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et elle a donc des fonctions dérivées partielles d'ordre 1 qui sont :

$$\frac{\partial F}{\partial x} : (x, y) \mapsto x + 2y + 2xy^2 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y} : (x, y) \mapsto 2x + y + 2x^2y$$

3. On sait que, F étant de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 , tout extremum de F ne pourra être obtenu qu'en un point critique de F . On est donc amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 2xy^2 = 0 \\ 2x + y + 2x^2y = 0 \end{cases}$$

On constate que dans ce système, $(x = 0) \Leftrightarrow (y = 0)$ et que $(x, y) = (0, 0)$ est une solution particulière de ce système. On cherche les autres solutions de ce système, c'est à dire qu'on suppose maintenant que $x \neq 0$ et $y \neq 0$; En multipliant la première ligne par x et la seconde par y on

obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2x^2y^2 = 0 & (L_1) \\ 2xy + y^2 + 2x^2y^2 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2x^2y^2 = 0 & (L_1) \\ x^2 = y^2 & (L_2 - L_1) \end{cases}$$

On note alors qu'on ne peut avoir $x = y$ car sinon (L_1) devient $x^2(3 + 2x^2) = 0$ qui n'est pas possible pour $x \neq 0$. Un système équivalent est donc :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2x^2y^2 = 0 & (L_1) \\ x = -y & (L_2 - L_1) \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} -x^2 + 2x^4 = 0 & (L_1) \\ x = -y & (L_2 - L_1) \end{cases}$$

et puisque $x \neq 0$:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} & (L_1) \\ x = -y & (L_2 - L_1) \end{cases}$$

les points critiques de F sont donc, en rajoutant la solution $(0, 0)$:

$$(0, 0); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

F étant de classe C^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 , on sait que l'on peut tester si ces points sont des abscisses d'extrema en calculant le célèbre « $rt - s^2$ » où, en tout point (x, y) on a :

$$r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = 1 + 2y^2, \quad s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 + 4xy; \quad t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 1 + 2x^2.$$

On peut résumer les résultats dans un tableau :

	r	s	t	$rt - s^2$
$(0, 0)$	1	2	1	-1
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	2	0	2	4
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	2	0	2	4

Compte tenu du signe de $rt - s^2$ et du signe de r , on déduit que $(0, 0)$ est un point selle de F et que :

$$F \text{ présente un minimum local en } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et en } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ dont la valeur commune est } \frac{1}{2}$$

Partie II

1. Pour tout réel x , les fonctions $t \mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$ et $t \mapsto t \cos(xt)e^{-t^2}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+, |\sin(xt)e^{-t^2}| \leq e^{-t^2}$ et $|t \cos(xt)e^{-t^2}| \leq te^{-t^2}$. Mais d'après le 2°) des préliminaires, on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt$ convergent, donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$ convergent. Le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives et continues permet alors de conclure

que les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$ convergent absolument et sont donc convergentes.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$; Considérons la fonction définie sur \mathbb{R} par $h : t \mapsto \sin(a + t)$. Cette fonction est de classe C^2 sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}, |h''(t)| = |-\sin(a+t)| \leq 1$; on peut donc appliquer, pour tout réel λ la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour h entre 0 et $\lambda : |g(\lambda) - g(0) - g'(0).\lambda| \leq 1 \cdot \frac{|\lambda - 0|^2}{2}$, c'est à dire :

$$|\sin(a + \lambda) - \sin(a) - \cos(a).\lambda| \leq \frac{\lambda^2}{2}$$

3. a. $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall h \in \mathbb{R}$, appliquons ce résultat en remplaçant a par xt et λ par xh ; on obtient : $|\sin((x+h)t) - \sin(xt) - ht \cos(xt)| \leq \frac{x^2 h^2}{2}$ et puisque toutes les intégrales convergent :

$$\begin{aligned} |S(x+h) - S(x) - hC(x)| &= \left| \int_0^{+\infty} \sin((x+h)t) e^{-t^2} dt - \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt - \int_0^{+\infty} ht \cos(xt) e^{-t^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} [\sin((x+h)t) - \sin(xt) - ht \cos(xt)] e^{-t^2} dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} |\sin((x+h)t) - \sin(xt) - ht \cos(xt)| e^{-t^2} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{x^2 h^2}{2} e^{-t^2} dt \text{ (cette intégrale converge bien!)} \\ &\leq \frac{x^2 h^2 \sqrt{\pi}}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $h \neq 0$: $\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| \leq \frac{x^2 |h| \sqrt{\pi}}{4}$, ce qui prouve, par le théorème d'encadrement des limites, que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) = 0$$

- b. Bien sûr, il s'en suit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = C(x)$; la fonction S est donc dérivable en tout réel x avec :

$$S'(x) = C(x)$$

4. a. Intégrons par parties l'intégrale $C(x)$ à l'aide des fonctions de classe C^1 $u : t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$ et $v : t \mapsto \cos(xt)$, cela donne : $\forall A \in \mathbb{R}^+,$

$$\int_0^A t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \int_0^A u'(t)v(t) dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} \cos(xt)\right]_0^A - \frac{x}{2} \int_0^A \sin(xt) e^{-t^2} dt$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ a pour limite 0 en $+\infty$ et la fonction $t \mapsto \cos(xt)$ est bornée sur \mathbb{R} . Ainsi

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-t^2} \cos(xt) = 0$$

Les intégrales dans les deux membres ont des limites lorsque $A \rightarrow \infty$ d'après II.1., on obtient donc :

$$\int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \left[\frac{1}{2}e^0 \cos(0)\right] - \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt$$

c'est à dire :

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x)$$

b. La fonction $x \mapsto 2e^{\frac{x^2}{4}} S(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et sa dérivée est

$$\begin{aligned} x \mapsto 2e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{x}{2} S(x) + S'(x) \right) &= 2e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{x}{2} S(x) + C(x) \right) \\ &= 2e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{x}{2} S(x) + \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x) \right) \\ &= 2e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{1}{2} \right) = e^{\frac{x^2}{4}} \end{aligned}$$

Ce que l'on peut résumer sous la forme

$$\left(2e^{\frac{t^2}{4}} S(t) \right)' = e^{\frac{t^2}{4}}$$

Les fonctions dans étant continues sur \mathbb{R} , on peut les intégrer sur $[0, x]$ pour x fixé dans \mathbb{R}^+ . Cela donne :

$$2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) - 2e^{\frac{0^2}{4}} S(0) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$$

Soit enfin $2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$

c. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $\frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$, on obtient : $S(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$

et en reportant dans l'égalité du 4.a. : $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$

Partie III

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{1}{1+x^2 t^2} \leq 1$ donc $0 \leq \frac{e^{-t^2}}{1+x^2 t^2} \leq e^{-t^2}$, les fonctions $t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{1+x^2 t^2}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont continues sur \mathbb{R} et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge d'après le préliminaire ; ainsi, le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives et continues permet de conclure que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2 t^2} dt$ converge.

2. a. $\forall u \in \mathbb{R}^+, (1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} = \frac{u^3}{1+u}$; or $0 \leq \frac{1}{1+u} \leq 1$ donc :

$$0 \leq (1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, x^2 t^2 \geq 0$; en en déduit immédiatement en posant $u = x^2 t^2$ et en multipliant les 3 membres de l'inégalité par e^{-t^2} que :

$$0 \leq (1-x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} - \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} \leq x^6 t^6 e^{-t^2}. \text{ Mais les intégrales } \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt$$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^6 t^6 e^{-t^2} dt$ convergent d'après le préliminaire et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2 t^2} dt$ converge d'après la question précédente. On peut donc intégrer l'encadrement sans changer le sens des inégalités, ce qui donne :

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2 t^2} dt \leq x^6 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t^6 e^{-t^2} dt}_{I_6} \text{ c'est à dire, compte}$$

tenu du 3.c. du préliminaire : $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6$

3. Et puisque toutes les intégrales en présence sont convergentes, on obtient en utilisant la linéarité de l'intégration :

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt - x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt + x^4 \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6, \text{ c'est à dire :}$$

$$0 \leq I_0 - x^2 I_2 + x^4 I_4 - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6 \text{ ou encore : } 0 \leq \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4} \right) - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6.$$

On divise alors, pour $x \neq 0$ les trois membres de cet encadrement par $|x^5|$ et on obtient

$$0 \leq \left| \frac{\sqrt{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4} \right) - g(x)}{x^5} \right| \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} |x|$$

il s'en suit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4} \right) - g(x)}{x^5} = 0$ que l'on peut écrire :

$$\sqrt{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4} \right) - g(x) = o(x^5)$$

ou enfin

$$g(x) = \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4} + 0.x^5 \right) + o(x^5)$$

qui est, par définition, le développement limité à l'ordre 5 de g en 0.

Partie IV

1. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, (2p)! \leq t^2 + (2p)!$ donc $0 \leq \frac{1}{t^2 + (2p)!} \leq \frac{1}{(2p)!}$ et puisque $t^{2p} \geq 0$:

$0 \leq \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \leq \frac{1}{(2p)!} t^{2p} e^{-t^2}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2}$ et $t \mapsto t^{2p} e^{-t^2}$ sont continues sur \mathbb{R} et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$ converge d'après les préliminaires. Donc, d'après le critère de comparaison

des intégrales de fonctions positives et continues, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$ converge

2. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \leq \frac{1}{(2p)!} t^{2p} e^{-t^2}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2}$ et $t \mapsto t^{2p} e^{-t^2}$ étant continues sur \mathbb{R} et leurs intégrales sur \mathbb{R} étant convergentes, on en déduit que :

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{(2p)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt \text{ d'où enfin : } 0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}.$$

En utilisant le résultat des préliminaires, on en déduit que $0 \leq u_p \leq \frac{1}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$ que l'on écrit : $0 \leq u_p \leq \left(\frac{1}{4} \right)^p \sqrt{\pi}$.

On utilise alors le fait que la série de terme général $\frac{\left(\frac{1}{4} \right)^p}{p!}$ est convergente (de somme $e^{\frac{1}{4}}$) et le

critère de comparaison des séries à termes positifs pour conclure que $\sum_{p \geq 0} u_p$ est convergente