



# Corrigés des épreuves de mathématiques voies scientifique et

François Delaplace (voie E), Pierre Girard (voie S)

Professeurs de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, lycée Notre-Dame du

## Voie scientifique



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EM LYON

1<sup>ère</sup> épreuve (option scientifique)

### MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.  
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

#### PROBLÈME I

##### Préliminaires

1.a. Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $t^n e^{-t^2} = \frac{0}{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ .

b. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$  est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$  converge.

On admet dans tout le problème :  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ .

On note, dans tout le problème, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ .

3.a. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$ .

b. Montrer, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $I_{2p+1} = 0$ .

c. Montrer, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$ .

1/4

Référence

# s 2006

# spécifiques à l'EM Lyon, économique

Grandchamp (Versailles).

## I Recherche d'extrêmes locaux pour une fonction de deux variables réelles

On note  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , par :

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :  $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2 y^2$ .
2. Calculer les dérivées partielles premières de  $F$  en tout point  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , et en déduire les trois points critiques de  $F$ .
3. Déterminer les extrêmes locaux de  $F$ . En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de  $F$  en chacun de ces points.

## II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les intégrales  $\int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt$  et  $\int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt$  convergent.

On note  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  les applications définies, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt.$$

2. Établir, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :  $|\sin(a + \lambda) - \sin a - \lambda \cos a| \leq \frac{\lambda^2}{2}$ .

On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

- 3.a. Démontrer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .
- b. En déduire que  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $S'(x) = C(x)$ .
- 4.a. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x)$ .
- b. Montrer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $2e^{-\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}} dt$ .
- c. En déduire, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $S(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$  et  $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$ .

## III Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$  converge.

On note  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par :  $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$ .

- 2.a. Montrer, pour tout  $u \in [0; +\infty[$  :  $0 \leq (1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3$ .
- b. En déduire, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6$ .
3. Montrer que  $g$  admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

Référence

#### IV Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$  converge.

On note, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$ .

2. Montrer, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}$ .

En déduire que la série de terme général  $u_p$  est convergente.

#### PROBLÈME II

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par  $I_n$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

On considère un  $n$ -uplet  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  de  $\mathbb{C}^n$  et le polynôme  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ .

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \dots & (0) & \dots & \dots & -a_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & (0) & \dots & \dots & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On note  $C$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définie par  $C =$

On dit que  $C$  est la matrice compagnon du polynôme  $P$ .

On note  $\mathcal{B}_0 = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

On note id l'application identité de  $\mathbb{C}^n$  et on appelle  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  tel que  $C$  soit la matrice associée à  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B}_0$ .

On note  $f^0 = \text{id}$  et, pour tout entier naturel  $k$ ,  $f^{k+1} = f^k \circ f$ .

1.a. Exprimer, pour tout  $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ ,  $f(\epsilon_i)$  en fonction de  $\epsilon_{i+1}$ .

b. En déduire :  $\forall j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ ,  $f^j(\epsilon_1) = \epsilon_{j+1}$  et  $f^n(\epsilon_1) = -(a_0\epsilon_1 + a_1\epsilon_2 + \dots + a_{n-1}\epsilon_n)$ .

2. Soit  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  défini par  $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0\text{id}$ .

a. Vérifier :  $g(\epsilon_1) = 0$ .

b. Montrer :  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $g \circ f^i = f^i \circ g$ .

c. En déduire :  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $g(\epsilon_i) = 0$ .

d. Montrer que le polynôme  $P$  est annulateur de l'endomorphisme  $f$ .

Application 1 : Déterminer une matrice  $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$  telle que  $A^3 = A^2 + 2A^2 + I_5$ .

e. Établir que toutes les valeurs propres de  $C$  sont des racines du polynôme  $P$ .

3.a. Soit  $Q = \alpha_0 + \alpha_1X + \dots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$  un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à  $n-1$ . On note  $Q(f)$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  défini par  $Q(f) = \alpha_0 \text{id} + \alpha_1f + \dots + \alpha_{n-1}f^{n-1}$ . Calculer  $Q(f)(\epsilon_1)$ .

b. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à  $n-1$  et annulateur de  $f$ .

c. Soit  $\lambda$  une racine du polynôme  $P$ .

Il existe donc un unique polynôme  $R \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P = (X - \lambda)R$ .

Vérifier que  $(f - \lambda \text{id}) \circ R(f) = 0$ , où  $0$  est l'endomorphisme nul de  $\mathbb{C}^n$ .

d. Conclure que toutes les racines du polynôme  $P$  sont des valeurs propres de  $C$ .

4.a. Montrer que, pour tout nombre complexe  $x$ , la matrice  $(C - xI_n)$  est de rang supérieur ou égal à  $n-1$ . En déduire que chaque sous-espace propre de  $C$  est de dimension 1.

b. En déduire que  $C$  est diagonalisable si et seulement si  $P$  admet  $n$  racines deux à deux distinctes.

5.a. Application 2 : Montrer que la matrice  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  est diagonalisable.

b. Application 3 : Montrer que la matrice  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  n'est pas diagonalisable.

6. On note  $B = {}^tC$  la matrice transposée de  $C$ .

a. Montrer que, pour tout nombre complexe  $t$ , la matrice  $(B - tI_n)$  est inversible si et seulement si la matrice  $(C - tI_n)$  est inversible.

b. En déduire que les matrices  $B$  et  $C$  ont les mêmes valeurs propres.

c. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $B$ . Déterminer une base du sous-espace propre de  $B$  associé à  $\lambda$ .

d. On suppose que le polynôme  $P$  admet  $n$  racines  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  deux à deux distinctes. Montrer que

$$B \text{ est diagonalisable et en déduire que la matrice } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \text{ est inversible.}$$

7. Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$  admettant  $n$  valeurs propres  $\mu_1, \dots, \mu_n$  deux à deux distinctes.

L'endomorphisme  $u$  est donc diagonalisable et on note  $\mathcal{E} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$  respectivement associés à  $\mu_1, \dots, \mu_n$ .

a. Soit  $a = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n$ . Montrer que la famille  $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$  est une base de  $E$ .

b. Montrer qu'il existe un polynôme  $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0$  tel que la matrice associée à  $u$  relativement à la base  $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$  soit la matrice compagnon du polynôme  $P_1$ .

## Problème I

### Préliminaires

1. a. On sait que pour tout  $\alpha > 0$  et tout  $\beta > 0$ ,  $t^\alpha = o_{t \rightarrow +\infty}(e^{\beta t})$ , c'est ce qu'on appelle naïvement les « croissances comparées » ; En particulier, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T^{\frac{n+2}{2}} = o_{T \rightarrow +\infty}(e^T)$  ce qui s'écrit :  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T^{\frac{n+2}{2}}}{e^T} = 0$ . En posant  $t = \sqrt{T}$ , on obtient donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{n+2}}{e^{t^2}} = 0$ , c'est à dire

$$\boxed{t^n e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)}$$

- b. Les fonctions  $t \mapsto t^n e^{-t^2}$  et  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  étant continues et positives sur  $[1, +\infty[$ , l'intégrale de Riemann  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  étant convergente (coefficient  $> 1$ ) et  $t^n e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$  (d'après la question précédente), on peut donc déduire du critère de négligeabilité des intégrales impropres que  $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$  est convergente. Le changement de variable  $u = -t$  appliqué à l'intégrale convergente  $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$  prouve que  $\int_{-\infty}^{-1} t^n e^{-t^2} dt$  est convergente; enfin, par continuité de la fonction  $t \mapsto t^n e^{-t^2}$  sur  $[-1; +1]$ , on sait que  $\int_{-1}^1 t^n e^{-t^2} dt$  existe. On déduit de tout cela que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt \text{ converge}}$$

2. On vient de montrer que, pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$  converge. Soit alors  $n$  un entier naturel et  $(a_0, \dots, a_n)$  une suite de réels, on déduit de ce qui précède que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k\right) e^{-t^2} dt$  converge. Ceci prouve que si  $P$  est un polynôme à coefficients réels, alors

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt \text{ converge}}$$

3. a. Soient  $A$  et  $B$  deux réels, on intègre par parties  $\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2} dt$  en utilisant les deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  :  
 $u : t \mapsto t^{n+1}$  et  $v : t \mapsto \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-t^2}$  dont les dérivées sont :  $u' : t \mapsto (n+1)t^n$  et  $v' : t \mapsto t e^{-t^2}$ ,

on obtient immédiatement :  $\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2} dt = \frac{-B^{n+1} e^{-B^2} + A^{n+1} e^{-A^2}}{2} + \frac{n+1}{2} \int_A^B t^n e^{-t^2} dt$  En utilisant le résultat du 1°a), et le résultat du 1°b) on voit que l'on peut faire tendre  $A$  vers  $-\infty$  et  $B$  vers  $+\infty$  pour obtenir :

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n \text{ converge}}$$

- b. Soit  $p$  un entier naturel et soit  $A$  un réel strictement positif, la fonction  $t \mapsto t^{2p+1} e^{-t^2}$  est continue et impaire sur  $[-A, +A]$  donc  $\int_{-A}^A t^{2p+1} e^{-t^2} dt = 0$  et puisque cette intégrale a pour limite  $I_{2p+1}$  lorsque  $A$  tend vers  $+\infty$ , on en déduit que :

$$\boxed{I_{2p+1} = 0}$$

4. Par récurrence bien sûr ! La propriété est vrai pour  $p = 0$  car c'est l'énoncé qui le dit... Supposons-la vraie pour un entier  $p$  quelconque, fixé et positif, on a alors :

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2} I_{2p} = \frac{(2p+1)(2p)!}{2 \cdot 2^{2p} p!} \sqrt{\pi} = \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{2 \cdot (p+1) 2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$$

C'est à dire  $I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2} (p+1)!} \sqrt{\pi} = \frac{[2(p+1)]!}{2^{2(p+1)} (p+1)!} \sqrt{\pi}$ . La propriété est donc vraie au rang  $(p+1)$ .

Le théorème de récurrence permet donc de conclure que, pour tout entier naturel  $p$ ,

$$\boxed{I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}}$$

### Partie I

1.  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $(t-x)^2(t-y)^2 = t^4 - 2(x+y)t^3 + (x^2 + 4xy + y^2)t^2 - 2xy(x+y)t + x^2y^2$   
 donc  $(t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} = t^4 e^{-t^2} - 2(x+y)t^3 e^{-t^2} + (x^2 + 4xy + y^2)t^2 e^{-t^2} - 2xy(x+y)t e^{-t^2} + x^2y^2 e^{-t^2}$   
 et en intégrant les deux membres par rapport à la variable  $t$ , sachant que toutes les intégrales convergent d'après la question 2°) des préliminaires, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt = I_4 - 2(x+y)I_3 + (x^2 + 4xy + y^2)I_2 - 2xy(x+y)I_1 + x^2y^2I_0$$

On peut alors utiliser le résultat de la question 3°c) des préliminaires, cela donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt = \left[\frac{3}{4} - 2(x+y) + (x^2 + 4xy + y^2)\frac{1}{2} - 2xy(x+y) + x^2y^2\right] \sqrt{\pi}$$

c'est à dire :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt = \left[\frac{3}{4} + (x^2 + 4xy + y^2)\frac{1}{2} + x^2y^2\right] \sqrt{\pi}}$$

2. D'après ce qui précède,  $F$  est une fonction polynôme ; elle est donc de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et elle a donc des fonctions dérivées partielles d'ordre 1 qui sont :

$$\frac{\partial F}{\partial x} : (x, y) \mapsto x + 2y + 2xy^2 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y} : (x, y) \mapsto 2x + y + 2x^2y$$

3. On sait que,  $F$  étant de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$ , tout extremum de  $F$  ne pourra être obtenu qu'en un point critique de  $F$ . On est donc amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 2xy^2 = 0 \\ 2x + y + 2x^2y = 0 \end{cases}$$

On constate que dans ce système,  $(x = 0) \Leftrightarrow (y = 0)$  et que  $(x, y) = (0, 0)$  est une solution particulière de ce système. On cherche les autres solutions de ce système, c'est à dire qu'on suppose maintenant que  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$  ; En multipliant la première ligne par  $x$  et la seconde par  $y$  on

obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2x^2y^2 = 0 & (L_1) \\ 2xy + y^2 + 2x^2y^2 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2x^2y^2 = 0 & (L_1) \\ x^2 = y^2 & (L_2 - L_1) \end{cases}$$

On note alors qu'on ne peut avoir  $x = y$  car sinon  $(L_1)$  devient  $x^2(3 + 2x^2) = 0$  qui n'est pas possible pour  $x \neq 0$ . Un système équivalent est donc :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2x^2y^2 = 0 & (L_1) \\ x = -y & (L_2 - L_1) \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} -x^2 + 2x^4 = 0 & (L_1) \\ x = -y & (L_2 - L_1) \end{cases}$$

et puisque  $x \neq 0$  :

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} & (L_1) \\ x = -y & (L_2 - L_1) \end{cases}$$

les points critiques de  $F$  sont donc, en rajoutant la solution  $(0, 0)$  :

$$(0, 0); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$F$  étant de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$ , on sait que l'on peut tester si ces points sont des abscisses d'extrema en calculant le célèbre «  $rt - s^2$  » où, en tout point  $(x, y)$  on a :

$$r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = 1 + 2y^2, \quad s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 + 4xy; \quad t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 1 + 2x^2.$$

On peut résumer les résultats dans un tableau :

	$r$	$s$	$t$	$rt - s^2$
$(0, 0)$	1	2	1	-1
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	2	0	2	4
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	2	0	2	4

Compte tenu du signe de  $rt - s^2$  et du signe de  $r$ , on déduit que  $(0, 0)$  est un point selle de  $F$  et que :

$$F \text{ présente un minimum local en } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et en } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ dont la valeur commune est } \frac{1}{2}$$

### Partie II

1. Pour tout réel  $x$ , les fonctions  $t \mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$  et  $t \mapsto t \cos(xt)e^{-t^2}$  sont continues sur  $[0, +\infty[$  et  $\forall t \in \mathbb{R}^+, |\sin(xt)e^{-t^2}| \leq e^{-t^2}$  et  $|t \cos(xt)e^{-t^2}| \leq te^{-t^2}$ . Mais d'après le 2°) des préliminaires, on sait que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt$  convergent, donc  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$  et  $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$  convergent. Le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives et continues permet alors de conclure

que les intégrales  $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$  et  $\int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$  convergent absolument et sont donc convergentes.

2. Soit  $a \in \mathbb{R}$ ; Considérons la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h : t \mapsto \sin(a + t)$ . Cette fonction est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}, |h''(t)| = |-\sin(a+t)| \leq 1$ ; on peut donc appliquer, pour tout réel  $\lambda$  la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour  $h$  entre 0 et  $\lambda : |g(\lambda) - g(0) - g'(0).\lambda| \leq 1 \cdot \frac{|\lambda - 0|^2}{2}$ , c'est à dire :

$$|\sin(a + \lambda) - \sin(a) - \cos(a).\lambda| \leq \frac{\lambda^2}{2}$$

3. a.  $\forall x \in \mathbb{R}$  et  $\forall h \in \mathbb{R}$ , appliquons ce résultat en remplaçant  $a$  par  $xt$  et  $\lambda$  par  $xh$ ; on obtient :  $|\sin((x+h)t) - \sin(xt) - ht \cos(xt)| \leq \frac{x^2 h^2}{2}$  et puisque toutes les intégrales convergent :

$$\begin{aligned} |S(x+h) - S(x) - hC(x)| &= \left| \int_0^{+\infty} \sin((x+h)t) e^{-t^2} dt - \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt - \int_0^{+\infty} ht \cos(xt) e^{-t^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} [\sin((x+h)t) - \sin(xt) - ht \cos(xt)] e^{-t^2} dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} |\sin((x+h)t) - \sin(xt) - ht \cos(xt)| e^{-t^2} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{x^2 h^2}{2} e^{-t^2} dt \text{ (cette intégrale converge bien!)} \\ &\leq \frac{x^2 h^2 \sqrt{\pi}}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $h \neq 0$  :  $\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| \leq \frac{x^2 |h| \sqrt{\pi}}{4}$ , ce qui prouve, par le théorème d'encadrement des limites, que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) = 0$$

- b. Bien sûr, il s'en suit que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = C(x)$ ; la fonction  $S$  est donc dérivable en tout réel  $x$  avec :

$$S'(x) = C(x)$$

4. a. Intégrons par parties l'intégrale  $C(x)$  à l'aide des fonctions de classe  $C^1$   $u : t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$  et  $v : t \mapsto \cos(xt)$ , cela donne :  $\forall A \in \mathbb{R}^+,$

$$\int_0^A t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \int_0^A u'(t)v(t) dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} \cos(xt)\right]_0^A - \frac{x}{2} \int_0^A \sin(xt) e^{-t^2} dt$$

La fonction  $t \mapsto e^{-t^2}$  a pour limite 0 en  $+\infty$  et la fonction  $t \mapsto \cos(xt)$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-t^2} \cos(xt) = 0$$

Les intégrales dans les deux membres ont des limites lorsque  $A \rightarrow \infty$  d'après II.1., on obtient donc :

$$\int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \left[\frac{1}{2}e^0 \cos(0)\right] - \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt$$

c'est à dire :

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x)$$

b. La fonction  $x \mapsto 2e^{\frac{x^2}{4}} S(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est

$$\begin{aligned} x \mapsto 2e^{\frac{x^2}{4}} \left( \frac{x}{2} S(x) + S'(x) \right) &= 2e^{\frac{x^2}{4}} \left( \frac{x}{2} S(x) + C(x) \right) \\ &= 2e^{\frac{x^2}{4}} \left( \frac{x}{2} S(x) + \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x) \right) \\ &= 2e^{\frac{x^2}{4}} \left( \frac{1}{2} \right) = e^{\frac{x^2}{4}} \end{aligned}$$

Ce que l'on peut résumer sous la forme

$$\left( 2e^{\frac{t^2}{4}} S(t) \right)' = e^{\frac{t^2}{4}}$$

Les fonctions dans étant continues sur  $\mathbb{R}$ , on peut les intégrer sur  $[0, x]$  pour  $x$  fixé dans  $\mathbb{R}^+$ . Cela donne :

$$2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) - \underbrace{2e^{\frac{0^2}{4}} S(0)}_0 = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$$

Soit enfin  $2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$

c. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par  $\frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$ , on obtient :  $S(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$

et en reportant dans l'égalité du 4.a. :  $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$

### Partie III

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{1}{1+x^2 t^2} \leq 1$  donc  $0 \leq \frac{e^{-t^2}}{1+x^2 t^2} \leq e^{-t^2}$ , les fonctions  $t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{1+x^2 t^2}$  et  $t \mapsto e^{-t^2}$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$  converge d'après le préliminaire ; ainsi, le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives et continues permet de conclure que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2 t^2} dt$  converge.

2. a.  $\forall u \in \mathbb{R}^+, (1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} = \frac{u^3}{1+u}$  ; or  $0 \leq \frac{1}{1+u} \leq 1$  donc :

$$0 \leq (1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3$$

b.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, x^2 t^2 \geq 0$  ; en en déduit immédiatement en posant  $u = x^2 t^2$  et en multipliant les 3 membres de l'inégalité par  $e^{-t^2}$  que :

$$0 \leq (1-x^2 t^2+x^4 t^4) e^{-t^2} - \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} \leq x^6 t^6 e^{-t^2}. \text{ Mais les intégrales } \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2 t^2+x^4 t^4) e^{-t^2} dt$$

et  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^6 t^6 e^{-t^2} dt$  convergent d'après le préliminaire et l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2 t^2} dt$  converge d'après la question précédente. On peut donc intégrer l'encadrement sans changer le sens des inégalités, ce qui donne :

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2 t^2+x^4 t^4) e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2 t^2} dt \leq x^6 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t^6 e^{-t^2} dt}_{I_6} \text{ c'est à dire, compte}$$

tenu du 3.c. du préliminaire :  $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2 t^2+x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6$

3. Et puisque toutes les intégrales en présence sont convergentes, on obtient en utilisant la linéarité de l'intégration :

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt - x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt + x^4 \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6, \text{ c'est à dire :}$$

$$0 \leq I_0 - x^2 I_2 + x^4 I_4 - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6 \text{ ou encore : } 0 \leq \sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4} \right) - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6.$$

On divise alors, pour  $x \neq 0$  les trois membres de cet encadrement par  $|x^5|$  et on obtient

$$0 \leq \left| \frac{\sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4} \right) - g(x)}{x^5} \right| \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} |x|$$

il s'en suit que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4} \right) - g(x)}{x^5} = 0$  que l'on peut écrire :

$$\sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4} \right) - g(x) = o(x^5)$$

ou enfin

$$g(x) = \sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4} + 0.x^5 \right) + o(x^5)$$

qui est, par définition, le développement limité à l'ordre 5 de  $g$  en 0.

### Partie IV

1.  $\forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, (2p)! \leq t^2 + (2p)!$  donc  $0 \leq \frac{1}{t^2 + (2p)!} \leq \frac{1}{(2p)!}$  et puisque  $t^{2p} \geq 0$  :

$0 \leq \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \leq \frac{1}{(2p)!} t^{2p} e^{-t^2}$ . Les fonctions  $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2}$  et  $t \mapsto t^{2p} e^{-t^2}$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$  converge d'après les préliminaires. Donc, d'après le critère de comparaison

des intégrales de fonctions positives et continues, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$  converge

2.  $\forall t \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \leq \frac{1}{(2p)!} t^{2p} e^{-t^2}$ . Les fonctions  $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2}$  et  $t \mapsto t^{2p} e^{-t^2}$  étant continues sur  $\mathbb{R}$  et leurs intégrales sur  $\mathbb{R}$  étant convergentes, on en déduit que :

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{(2p)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt \text{ d'où enfin : } 0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}.$$

En utilisant le résultat des préliminaires, on en déduit que  $0 \leq u_p \leq \frac{1}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$  que l'on écrit :  $0 \leq u_p \leq \left( \frac{1}{4} \right)^p \sqrt{\pi}$ .

On utilise alors le fait que la série de terme général  $\frac{\left( \frac{1}{4} \right)^p}{p!}$  est convergente (de somme  $e^{\frac{1}{4}}$ ) et le

critère de comparaison des séries à termes positifs pour conclure que  $\sum_{p \geq 0} u_p$  est convergente