A 2006 MATH. I MP

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2006

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et l colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$ sera considéré comme élément de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{C})$. Dans la suite, on identifie les matrices carrées (respectivement les matrices colonnes) et les endomorphismes (respectivement les vecteurs) canoniquement associés dans $\mathbb{C}^n$: par exemple, on note par la même lettre une matrice T de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont T est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^l$, $(Mx)_i$ désigne la i-ième composante du vecteur $Mx \in \mathbb{K}^n$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ et } \|M\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1},$$

pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, la norme matricielle subordonnée.

Définition 1 *On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$,de coefficients notés $(m_{ij}, 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq l)$, est positive (respectivement strictement positive), ce que l'on note $M \geq 0$ (respectivement $M > 0$), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs) :*

$$m_{ij} \geq 0 \text{ (resp. } m_{ij} > 0\text{) pour tout } (i,j) \in \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, l\}.$$

Pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, $M \geq N$ (respectivement $M > N$) lorsque $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ de coefficients notés $(m_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$ est dite stochastique lorsqu'elle est positive et que de plus

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1, \text{ pour tout } j \in \{1, \cdots, n\}.$$

On définit les ensembles B, B^+ et Σ par :

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\}, \\ B^+ &= \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, x > 0\}, \\ \Sigma &= \{x \in \mathbb{R}^n \ /\, \|x\|_1 = 1\}. \end{aligned}$$

Nous souhaitons montrer le résultat suivant :

Théorème 1 (Perron-Frobenius) *Soit $T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ stochastique telle que $(\mathrm{I}_n + T)^{n-1} > 0$. Il existe un vecteur strictement positif x_0 satisfaisant $Tx_0 = x_0$. Toutes les valeurs propres de T sont de module inférieur à 1 et pour tout vecteur y de $\Sigma \cap B$,*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j y = \frac{x_0}{\|x_0\|_1}.$$

Les deux parties sont dans une large mesure indépendantes.

I Un vecteur propre strictement positif

On suppose que T est un élément positif de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tel que $P = (\mathrm{I}_n + T)^{n-1}$ est strictement positive.

1) Montrer que pour tout $x \in B$, l'ensemble $\Gamma_x = \{\theta \in \mathbb{R}^+ \,/\, \theta x \leq Tx\}$ est non vide, fermé et borné.

On note $\theta(x)$ son plus grand élément.

2) Montrer que pour tout $x \in B$, on peut calculer $\theta(x)$ de la manière suivante :

$$\theta(x) = \min \left\{ \frac{(Tx)_i}{x_i} \Big/ \ 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0 \right\}.$$

On note θ l'application de B dans $\mathbb{R}^+$ qui à x associe $\theta(x)$.

3) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \in B$, $\theta(\alpha x) = \theta(x)$.

4) Montrer que $P(B) \subset B^+$.

5) Montrer que pour tout $x \in B$, $\theta(Px) \geq \theta(x)$ et $\theta(Px) > 0$.

6) Soit $x \in B$ un vecteur propre de T. Montrer que $\theta(Px) = \theta(x)$.

7) Soit $x \in B$ tel que $\theta(Px) = \theta(x)$, montrer que x est un vecteur propre de T pour la valeur propre $\theta(x)$.

8) Soit $C = B \cap \Sigma$. Montrer que l'application θ est continue de $P(C)$ dans $\mathbb{R}$.

9) Justifier l'existence de $x_0 \in P(C)$ tel que $\theta(x_0) = \sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x)$.

10) Montrer que $\sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x) \geq \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$.

11) Montrer que $\sup\limits_{x \in B} \theta(x) = \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$.

12) Montrer que $\sup_{x \in C} \theta(x) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$ et que $\theta(x_0) = \sup_{x \in C} \theta(x)$.

On pose $\theta_0 = \theta(x_0)$.

13) Montrer que x_0 est un vecteur propre, strictement positif, de T pour la valeur propre θ_0 et que $\theta_0 > 0$.

II Une méthode d'approximation

On suppose maintenant que T est stochastique et telle que $P = (\mathrm{I}_n + T)^{n-1}$ est strictement positive.

Pour un vecteur $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on note x^+ le vecteur $(|x_1|, \cdots, |x_n|)$, où $|z|$ est le module du complexe z. Pour tout entier $k \geq 1$, on pose

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j.$$

14) Soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de T pour la valeur propre θ. Montrer que $|\theta| x^+ \leq T x^+$.

15) En déduire que $|\theta| \leq \theta_0$.

16) Montrer que $|\theta| \, \|x^+\|_1 \leq \|x^+\|_1$ et en déduire que $|\theta| \leq 1$.

17) En déduire $\theta_0 = 1$.

18) Montrer que pour tout $j \geq 1$, T^j et R_j sont des matrices stochastiques.

19) Établir, pour tout $k \geq 1$, les inégalités suivantes :

$$\|T^k\|_1 \leq 1 \text{ et } \|R_k\|_1 \leq 1.$$

20) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\|T R_k - R_k\|_1 \leq \dfrac{2}{k}$.

21) Soit $x \in \mathbb{C}^n$, montrer que la suite $(R_k x, k \geq 1)$ a au moins une valeur d'adhérence.