CAUSALITÉ

NOTIONS PRINCIPALES

1. Causalité

1.1.Structure d'un système asservi

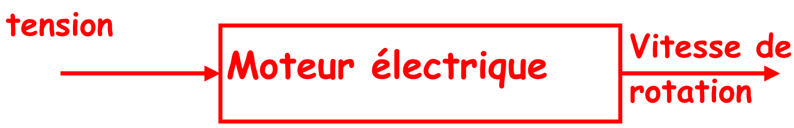
Un système asservi possède deux parties essentielles :

- **le processus**
  composé du pré - actionneur, de l'actionneur et de l'effecteur, il permet d'obtenir la sortie du processus à partir d'un signal de commande (la plupart du temps, une tension)

Exemple :

☺ Une pompe

☺ un moteur électrique :



- **la commande**.
  Elle a pour but d'imposer le comportement du processus, elle doit donc établir l'entrée du processus dans le but d'obtenir en sortie du processus le comportement ou la quantité voulue. Finalement, on peut tracer :

La commande revient donc à inverser le processus.

Par conséquent, la commande ne peut être conçue correctement sans avoir identifié les caractéristiques du processus à commander !!!

1.2.Règle de causalité

Un processus réagit à des grandeurs influentes en établissant des grandeurs influencées. Toutes ces grandeurs sont reliées entre elles par des relations qui sont caractéristiques du processeur.

Pour respecter la **CAUSALITÉ**, la sortie ne doit dépendre que des valeurs **présentes** et **passées** de l'entrée.
Ce qui signifie mathématiquement que l'on ne peut pas dériver si l'on veut respecter la causalité. En effet, si l'on se reporte à la définition de la dérivée d'une fonction :
$\frac{df}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$, on voit apparaître le **terme non causal** : $f(t+\Delta t)$ puisqu 'il dépend des valeurs futures !!!

- Ce qui va se passer dépend du présent et de la somme des évènements passés. Or la somme des évènements passés n'est ni plus ni moins qu'une intégration.
- **Physiquement la dérivation n'a pas de sens !!!, elle n'est pas CAUSALE.**

Il suffit de changer de paramètre pour ne plus faire apparaître de dérivation :

Soit une opération de dérivation représentée ci-contre :
Elle n'est pas CAUSALE.

$$e \equiv E \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\equiv p} \longrightarrow \left(s=\frac{de}{dt}\right)\equiv\left(S=pE\right)$$

Pour modéliser ce que représente cette opération par une fonction CAUSALE, il suffit de changer l'entrée :

$$\left(e_1=\frac{de}{dt}\right)\equiv\left(E_1=pE\right) \longrightarrow \boxed{1\equiv 1} \longrightarrow \left(s=e_1\right)\equiv\left(S=E_1\right)$$

Le respect de cette notion de CAUSALITÉ va donc « décider » des grandeurs à choisir en entrée des systèmes.

2. Mise en équations d'un processus

Prenons le modèle très courant de moteur électrique à courant continu :
Rappel :
Les équations de comportement dans le domaine temporel s'écrivent :

$$\begin{cases} e=k\omega \\ C_m=ki \\ J\dfrac{d\omega}{dt}=C_m-C_r \\ Ri+L\dfrac{di}{dt}+e=u \end{cases}$$

2.1.Equation de comportement mécanique (issue de l'écriture du PFD)

$J\frac{d\omega}{dt}=C_m-C_r$ équation du moment dynamique avec Cm (couple moteur) et Cr (couple résistant = perturbation), J = inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur.
Cette équation fait apparaître une dérivation. Dans la transcription littérale de l'équation, on écrirait donc que :

$C_m = J\dfrac{d\omega}{dt} + C_r$, avec C_m, la sortie et ω, l'entrée. Dans cette vision, la vitesse de rotation engendrerait donc le couple moteur !!!!! Ceci ne respecte pas la CAUSALITÉ

On doit donc pas changer d'entrée et de sortie : $\omega(t) = \omega_{t=0} + \dfrac{1}{J}\int_0^t (C_m - C_r)\, dt$.

La sortie est donc ω et l'entrée C_m : c'est le couple qui provoque la vitesse de rotation et non le contraire.

ω est la grandeur influencée

C_m est la grandeur influente.

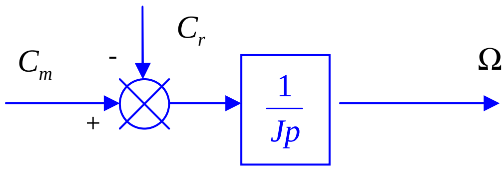
Ce qui s'écrit dans le domaine de Laplace (fréquentiel) : $\Omega = \dfrac{1}{Jp}(C_m - C_r)$

Conclusion :

Toute équation différentielle impose le choix des entrée et sortie si l'on veut respecter la ntion de CAUSALITE. ***On parle de relation causale***.

Modélisation schéma bloc :

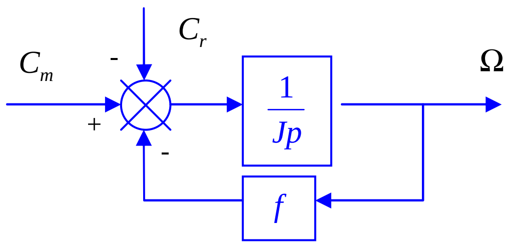
L'équation $\Omega = \dfrac{1}{Jp}(C_m - C_r)$, se représente ainsi :



On vérifie bien la CAUSALITÉ en n'ayant que des blocs de gains ou d'intégration (division par p)

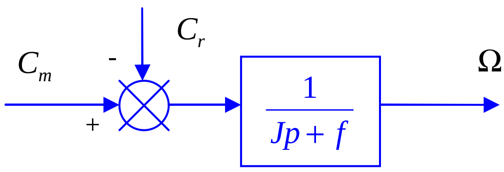
En tenant compte du frottement visqueux, on obtient l'équation différentielle suivante :

$J\dfrac{d\omega}{dt} = C_m - C_r - f\omega$ qui s'écrit dans le domaine fréquentiel: $\Omega = \dfrac{1}{Jp}\left[C_m - C_r - f\Omega\right]$, ce qui se donne la structure schéma bloc ci-contre :



On remarque que la est toujours respectée puisque l'on a uniquement des blocs de gains ou d'intégration

Ce schéma bloc qui peut se simplifier par celui-ci-contre:



On peut ainsi voir que l'on respecte globalement la causalité puisque l'ordre du dénominateur est supérieur à l'ordre du numérateur.

2.2.Modélisation du comportement électrique

En reprenant l'équation de comportement électrique :

$Ri + L\dfrac{di}{dt} + e = u$, ce qui donne après transformée de Laplace $RI + LpI + E = U$.