ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2003 **FILIÈRE PC**

PREMIÈRE COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

La matière noire dans l'univers

L'univers est peuplé de galaxies, généralement regroupées en amas, dont la luminosité provient des étoiles qui les composent. Par un raisonnement simple supposant une relation linéaire entre la densité de lumière et la densité de masse, il est possible, à partir de la mesure de la luminosité d'une galaxie, d'estimer sa masse sous forme d'étoiles. Indépendamment de cette approche, la masse d'une galaxie peut être déterminée par la mesure de la force qu'elle exerce sur des objets situés dans son champ de gravitation. Cette mesure aboutit à une masse totale bien plus importante que celle déduite de sa composante lumineuse, laissant supposer l'existence d'une composante de matière « noire ».

De même, l'estimation de la masse des amas de galaxies aboutit à un désaccord entre la masse lumineuse et la masse gravitationnelle.

La mise en évidence de matière noire fait l'objet de ce problème.

Données numériques

Masse solaire	$1\,M_S = 1,99 \times 10^{30}$ kg
Parsec (unité de longueur)	$1\,pc = 3,09 \times 10^{16}$ m
Constante de gravitation universelle	$G = 6,67 \times 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}
Masse de l'atome d'hydrogène	$\mu_H = 1,67 \times 10^{-27}$ kg
Célérité des ondes électromagnétiques dans le vide	$c = 3,00 \times 10^{8}$ m · s^{-1}
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19}$ C

Formulaire

Dans tout le problème, les coordonnées sphériques seront notées (r, θ, φ) et les coordonnées cylindriques (R, θ, z).

Intégrale particulière :

$$\int_0^x \frac{1}{1+u^2} du = \arctan x$$

On note $\Phi(\vec{r})$ le potentiel dont dérive le champ gravitationnel $\vec{A}(\vec{r})$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi \ .$$

I. Modélisation d'une galaxie spirale

La distribution de masse des étoiles (masse visible) d'une galaxie est modélisée par le potentiel gravitationnel Φ_G défini par :

$$\Phi_G(R,z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2+b^2})^2}} \qquad a, b > 0 \ .$$

Nous allons chercher à en déduire la forme de la distribution de masse des étoiles d'une telle galaxie.

1. Considérons d'abord le cas limite où $b = 0$.

a) Donner l'expression simplifiée du potentiel gravitationnel que l'on notera Φ_D.

b) Montrer qu'en tout point (R,z) avec $z < 0$, le potentiel Φ_D est équivalent à celui engendré en ce même point par une masse ponctuelle placée en $(0,a)$. Que peut-on en conclure en ce qui concerne la valeur de la densité de masse $\rho(R,z)$ en tout point du demi espace $z < 0$?

c) À quel système simple est équivalent le potentiel en tout point (R,z) avec $z > 0$?

d) Où se trouve localisée la masse correspondant à Φ_D. Préciser, sans calcul, la forme des courbes isodensité et caractériser la forme générale de la galaxie.

2. Considérons à présent le cas où $a = 0$.

a) Donner, en fonction de r, G, M et b, l'expression simplifiée du potentiel gravitationnel que l'on notera Φ_S.

b) En déduire la forme des surfaces isodensité et caractériser la forme générale de la galaxie dans ce cas.

3. Décrire schématiquement, dans un plan contenant $0z$, l'évolution des courbes d'isodensité lorsque le rapport $\dfrac{b}{a}$ varie. Illustrer graphiquement le cas où $b \gg a$ et celui où $b \ll a$.

4. Une galaxie spirale peut être décrite par un disque fin présentant un renflement en son centre ; les « bras » en spirale de la galaxie correspondent à de petites surdensités locales qui seront négligées. On admettra que le potentiel Φ_G est apte à décrire la distribution de masse visible d'une telle galaxie.

En analysant le comportement asymptotique du potentiel Φ_G donner l'expression de la masse visible totale de la galaxie.

II. Rotation d'une galaxie spirale

1. La plupart des étoiles de la galaxie se déplacent selon des orbites circulaires dans le plan équatorial de la galaxie.

a) Pour une orbite de rayon R, déterminer la valeur de la vitesse $V(R)$ de l'étoile en fonction de G, M, R, a et b. Quelle est la forme asymptotique de $V(R)$ quand R tend vers l'infini ?

b) Exprimer en fonction de a et de b la distance R_{max} à laquelle $V(R)$ est maximale.

2. *Application numérique.* On donne pour une galaxie typique $a = 1$ kpc, $b = 0,1$ kpc, $M = 2 \times 10^{10}\, M_S$.

a) Calculer la vitesse $V(R)$ à la distance $R = 50$ kpc du centre.

b) Calculer la vitesse maximale $V_{\text{max}} = V(R_{\text{max}})$.

c) Illustrer graphiquement l'allure de $V(R)$.

III. Mesure expérimentale de la rotation d'une galaxie

La mesure de la « courbe de rotation » $V(R)$ d'une galaxie se fait par l'observation de raies d'émission ou d'absorption de nuages de gaz interstellaires qui se déplacent à la vitesse $V(R)$. Une partie du gaz interstellaire est composée d'atomes d'hydrogène neutre dont l'état électronique fondamental possède deux niveaux d'énergie séparés par une différence de 6×10^{-6} eV. Le passage de l'état de haute énergie à celui de basse énergie est accompagné de l'émission d'une onde à la fréquence $\nu = 1,4$ GHz, soit 21 cm environ de longueur d'onde.

1. La galaxie est assimilée à un disque mince à symétrie axiale, dont la normale au plan fait un angle i avec la direction de visée (figure 1).

a) Comment peut être déterminée expérimentalement l'inclinaison i de la galaxie ?

b) Exprimer en fonction de i, θ et $V(R)$ la composante V_{obs} de la vitesse de rotation $V(R)$ selon la ligne de visée Δ orientée de la galaxie vers l'observateur.

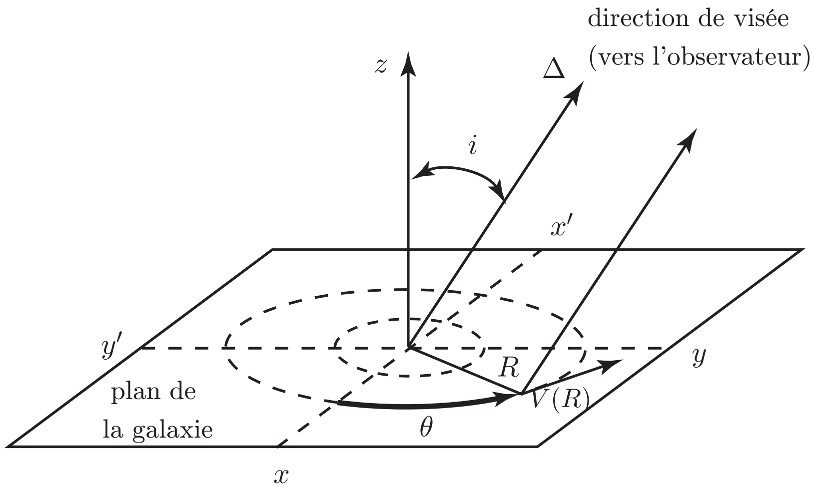

Figure 1. Dans le plan de la galaxie, l'angle θ a pour origine la direction $x'x$ de ce plan orthogonale à la direction de visée Δ, l'axe $y'y$ étant la projection de Δ sur ce plan.

2. Lorsqu'une source émettant une onde électromagnétique de célérité c et de longueur d'onde λ se rapproche d'un observateur à la vitesse $v \ll c$ le long de sa direction de visée, ce dernier mesure une longueur d'onde λ' décalée (effet Doppler) donnée par : $\lambda' = \lambda\left(1 - \frac{v}{c}\right)$ au premier ordre en v/c.

a) Un observateur mesure les longueurs d'onde $\lambda'(\theta)$ et $\lambda'(\theta + \pi)$ de la raie d'émission de l'hydrogène neutre émise en deux points diamétralement opposés de la galaxie. Exprimer en fonction de $i, \theta, V(R)$ et λ (la longueur d'onde de la raie à l'émission) le décalage spectral $\Delta\lambda' = |\lambda'(\theta + \pi) - \lambda'(\theta)|$ observé. Pour quel diamètre $\Delta\lambda'$ est-il maximal ?

b) Quelles sont les inclinaisons de galaxies défavorables à cette mesure ?

3. La plupart des galaxies pour lesquelles la mesure a pu être effectuée ont une loi $V(R)$ qui est en accord avec les prédictions de la partie **II** dans les régions centrales de la galaxie, mais qui tend vers une valeur constante V_C au-delà de quelques kiloparsecs du centre, correspondant à $R \gg a, b$.

a) Dans ce domaine $R \gg a, b$, en supposant sa distribution à symétrie sphérique et en utilisant les résultats de la partie **II**, déterminer la dépendance en R de la masse $M_{\text{tot}}(R)$ contenue dans la sphère de rayon R, qui permet d'interpréter l'existence d'une vitesse constante V_C ; en quoi cela justifie-t-il l'existence de matière noire au sein des galaxies ?

b) En considérant la galaxie constituée de deux composantes massiques, l'une visible (disque lumineux D) et l'autre sombre (halo H), exprimer la vitesse résultante V_{tot} en fonction des vitesses V_D et V_H que donnerait chacune des composantes prises individuellement.

c) Le halo, supposé à symétrie sphérique, peut être modélisé par une distribution de matière de la forme $\rho_H(r) = \dfrac{\beta_0}{r^2 + r_0^2}$ où r_0 et β_0 sont des paramètres. Justifier la dépendance à grande distance en $\frac{1}{r^2}$ de la densité de masse totale ρ_{tot}. Établir l'expression de ρ_{tot} en fonction de r, V_C et G. En déduire que $\beta_0 = \frac{V_C^2}{4\pi G}$. Quel est l'intérêt de l'introduction de la constante r_0 ?

d) Exprimer $V_H(R)$ en fonction de V_C, R et r_0.

4. *Application numérique* : $V_C = 200\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$, $r_0 = 5$ kpc.

a) Les méthodes d'observation ne fournissent aucune donnée au-delà de $R_{\text{lim}} = 50$ kpc, distance pour laquelle $V(R) \simeq V_C$. En déduire une limite inférieure de la masse totale M_T de la galaxie et une limite supérieure à la fraction massique d'étoiles au sein de la galaxie.

b) Calculer V_H et V_{tot} à $R = R_{\text{max}}$ et à $R = R_{\text{lim}}$ du centre de la galaxie. Dessiner schématiquement les courbes $V_D(R)$ due au disque, $V_H(R)$ due au halo ainsi que la courbe $V_{\text{tot}}(R)$.

5. Une dizaine de points de mesure régulièrement espacés le long d'un diamètre de la galaxie sont nécessaires pour estimer sa « courbe de rotation ».

a) Quelle résolution $\Delta\lambda/\lambda$ sur la mesure des longueurs d'onde des raies est nécessaire pour mesurer une vitesse de rotation de l'ordre de V_C ?

b) En raison de la limite due à la diffraction, quelle est la taille minimale du radiotélescope qu'il faut utiliser pour obtenir la résolution spatiale voulue sur la galaxie la plus proche dont le diamètre angulaire est de 10 minutes d'arc ? Quelle technique peut être envisagée pour obtenir une telle résolution ?

IV. Amas de galaxies

La mise en évidence expérimentale de la présence de matière noire dans les galaxies (partie **III**) justifie l'étude d'autres systèmes afin de confirmer cette observation et son interprétation.

Un amas de galaxies est une structure comprenant une centaine de galaxies liées gravitationnellement, que l'on supposera à symétrie sphérique et de rayon R_A. Dans cette partie, nous allons nous attacher à mettre en évidence les différentes contributions à la masse gravitationnelle d'un amas de galaxies.

1. En utilisant la masse d'une galaxie typique de la partie **II.2** et en considérant qu'un amas comporte $N = 100$ galaxies, calculer numériquement la contribution M_V à la masse de l'amas sous forme de galaxies. C'est la masse visible de l'amas.

2. La masse gravitationnelle de l'amas peut être déduite des déterminations des vitesses des galaxies dans le champ gravitationnel de l'amas. On observe expérimentalement que le décompte des galaxies en fonction de leur vitesse croit avec celle-ci jusqu'à une coupure franche, correspondant à une vitesse maximale V_{max}.

a) En interprétant cette vitesse maximale $V_{\max}$ comme une vitesse de libération, exprimer la masse gravitationnelle M_A de l'amas en fonction de G, $V_{\max}$ et R_A. En donner la valeur numérique pour $R_A = 1$ Mpc et $V_{\max} = 2500 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) L'amas, de rayon $R_A = 1$ Mpc, est constitué d'une centaine de galaxies, chacune possédant un halo de rayon externe R_H. En prenant leur volume total égal à celui de l'amas, déterminer une limite supérieure pour R_H ; en déduire à l'aide des résultats de **III.3** la masse totale d'une de ces galaxies. Comparer alors la somme des masses ainsi évaluées des galaxies à la masse M_A de l'amas ; qu'en concluez-vous ?

3. L'ensemble de l'amas baigne dans un gaz chaud d'ions et d'électrons détecté par son émission dans le domaine des rayons X ; soit T_g sa température. Nous allons ici évaluer la contribution de ce gaz à la masse gravitationnelle de l'amas. On désigne par $M_A(r)$ la masse de l'amas contenue à l'intérieur de la sphère centrée de rayon r. On admet que l'amas peut être considéré comme un fluide en équilibre (équilibre entre les forces de pression et de gravitation).

a) Établir, entre la pression $P(r)$ du gaz, sa masse volumique $\rho_g(r)$ et la masse $M_A(r)$, la relation traduisant le fait que le gaz est en équilibre mécanique.

b) En supposant que le gaz est un gaz parfait, exprimer P en fonction du nombre d'électrons par unité de volume n_e, de la constante de Boltzmann k_B et de la température du gaz T_g, en considérant le gaz composé uniquement d'hydrogène, entièrement ionisé à cette température.

c) Comment s'écrit alors la relation d'équilibre mécanique en fonction de la densité électronique n_e, la température du gaz $T_g, G, k_B, M_A(r)$, r, et la masse μ_H de l'atome d'hydrogène.

d) La densité d'électrons suit la loi expérimentale $n_e = \dfrac{n_0}{1 + r^2/r_A^2}$ avec une extension observée du gaz jusqu'à une distance $4r_A$ du cœur de l'amas. En faisant l'hypothèse d'un gaz isotherme, déterminer la masse M_A de l'amas ; montrer que la masse M_{gaz} du gaz jusqu'à la distance limite $4r_A$ est donnée par $M_{\text{gaz}}(4r_A) = 4\pi\, \mu_H\, n_0 r_A^3 [4 - \arctan 4]$.

e) *Application numérique.* On donne $k_B T_g = 9$ keV, $n_0 = 1,5 \times 10^3 \text{ m}^{-3}$ et $r_A = 0,3$ Mpc. Calculer M_A et M_{gaz}.

4. Discuter la cohérence des résultats de cette partie, et donner la composition en pourcentage massique d'un amas de galaxie en terme de gaz, matière lumineuse (galaxies) et matière noire.

* *
*

Rapport de M. Frédéric PINCET et Mme Sophie REMY, correcteurs.

L'épreuve du concours 2003 traitait d'un problème d'astrophysique d'actualité, celui de la masse manquante. Le problème visait à faire comprendre la nécessité d'introduire cette notion en calculant les masses des différentes composantes des galaxies et amas de galaxies.

Malgré l'acuité du sujet, les questions se résolvaient à partir de notions simples de mécanique et d'optique mais qui demandaient néanmoins à être appliquées avec pertinence dans un cadre différent de celui abordé dans le cours. Les candidats devaient également faire preuve de bon sens pour l'interprétation des résultats numériques et l'analyse des données, ainsi que d'un minimum de rigueur dans le développement de certains calculs ou de projections géométriques.

Toutes les questions ont été abordées et résolues, mais nous avons été surpris par le nombre important d'erreurs grossières, davantage conséquences d'un manque de rigueur et d'attention que de réelles ignorances. De nombreux candidats ont dû ainsi avoir la désagréable surprise d'une note très basse alors qu'ils pensaient avoir bien perçu l'épreuve. Dans quelques copies, parfois très étoffées, tous les résultats étaient faux.

Les correcteurs tiennent compte bien sûr d'abord du raisonnement, mais dans le cas de questions simples ou très proches du cours, ou encore d'applications numériques aberrantes, ils n'ont fait preuve d'aucune indulgence. Rappelons que l'épreuve s'inscrit dans le cadre d'un concours et non d'un examen, et sert à sélectionner des étudiants en sciences de haut niveau.

La moyenne est autour de 8,4 avec un écart-type de l'ordre de 3,7. 4% de notes sont inférieures à 2 et donc potentiellement éliminatoires. La répartition est la suivante :

$0 \leqslant N < 4$	9%
$4 \leqslant N < 8$	40%
$8 \leqslant N < 12$	34%
$12 \leqslant N < 16$	13%
$16 \leqslant N \leqslant 20$	4%

Nous conseillons aux futurs candidats de se référer aux rapports antérieurs dans lesquels nous avons déjà prodigué de nombreux conseils qui semblent être assez suivis.

Rappelons les principaux :

– Prendre le temps d'exprimer clairement le raisonnement et de rédiger de façon simple mais sans ambiguïté, le doute n'étant jamais en faveur du candidat.

Eviter la paraphrase de l'énoncé lorsqu'un petit raisonnement « littéraire » est demandé.

Vérifier rapidement l'homogénéité du résultat et toujours donner l'unité lors d'une application numérique.

– Ne pas essayer de « bidouiller » un résultat afin de trouver coûte que coûte celui de l'énoncé. Les correcteurs prennent le temps qu'il faut pour lire et évaluer les copies. Il vaut mieux continuer avec le résultat donné si on ne trouve pas l'éventuelle erreur dans un délai raisonnable.

En cas d'application numérique aberrante, le signaler, et éviter d'encadrer un résultat qui n'a pas de sens, comme par exemple une valeur de vitesse supérieure à la vitesse de la lumière.

– Ne pas hésiter, toutes les fois que c'est possible, et a fortiori quand c'est nécessaire, de faire un schéma. Un petit dessin est souvent bien plus démonstratif que des lignes de discours oiseux.

Analysons à présent les différentes parties. Conformément à notre habitude nous indiquons entre crochets, pour chaque question, le pourcentage des copies ayant obtenu plus de la moitié des points.

Première partie

Cette partie ne demandait pas de connaissances particulières et il « suffisait » de se laisser guider par l'énoncé et de réfléchir calmement en s'aidant de schémas simples. Elle a pourtant dérouté la majorité des candidats qui ne sont sans doute pas assez habitués à s'extraire d'exercices standards.

1. [30 %]

a) La principale erreur provient de l'oubli de la valeur absolue.

b) La première partie s'est traitée en général sans problème. L'application du théorème de Gauss pour le champ gravitationnel est bien assimilée. En revanche la suite de la question a été très mal appréhendée par la grande majorité des candidats qui n'ont pas réussi à voir la conséquence de l'analogie avec une masse ponctuelle pour en déduire la densité.

c) et d) Ces questions, très analogues aux précédentes, ont été traitées de la même manière.

La forme générale de la galaxie a été vraiment très mal comprise, toujours sans doute à cause d'absence d'analyse des résultats intermédiaires. Apparemment les candidats ne sont pas du tout familiers avec ce genre de raisonnement. Par ailleurs, il est tout à fait anormal que plusieurs candidats aient proposé – dessin à l'appui ! – une forme « hyperboloïde » pour la galaxie !

2. [62 %]

a) et b) Cette question a été beaucoup mieux abordée et réussie et la forme de la galaxie identifiée dans la plupart des cas.

3. [11 %]

Ceux qui ont compris la première question n'ont pas eu d'hésitation. D'autres s'en sont sortis avec des arguments plus ou moins convaincants que nous avons évalués selon leur pertinence.

Malheureusement nous avons assisté à un déballage d'inepties : De nombreux candidats écrivent – et dessinent - vraiment n'importe quoi sans aucun complexe. Cela est affligeant pour des étudiants destinés à prendre des responsabilités.

4. [16 %]

Nous avons été surpris par les complications dans lesquelles se sont englués des candidats pour ne pas aboutir. Or ici encore, il « suffisait » de suivre le texte, et de voir, selon le comportement asymptotique, à quoi pouvait s'identifier la distribution.

Deuxième partie

Cette partie était essentiellement calculatoire, et donc moins déroutante. Elle a été largement abordée.

1. [68 %]

a) La question a été bien traitée dans l'ensemble.

b) Le calcul de la dérivée reste encore un mystère pour certains qui se noient dans des calculs bien compliqués. Mieux vaut procéder par étapes et avancer lentement mais sûrement !

2. [61 %]

a) et b) Les applications numériques donnent toujours du fil à retordre. Nous avons été surpris du nombre élevé de résultats supérieurs à la vitesse de la lumière ! Les candidats devraient être plus attentifs sur ce point, surtout quand ils donnent le résultat en mégaparsec par seconde. Se rendent-ils compte seulement de ce que cela représente ?

c) Le graphe n'a pas posé de problème si ce n'est que des candidats arrivent à tracer une courbe sans maximum (sinon en zéro), alors qu'il en ont proposé une valeur aux questions précédentes.