ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2003

PREMIÈRE COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Microscopie à force électrostatique

Le problème expose le principe de fonctionnement d'un microscope à force électrostatique. Cette technique d'analyse de surfaces permet de réaliser des cartographies de gradients de forces électrostatiques, avec une résolution latérale de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres.

La première partie du problème décrit le principe de mesure de la pulsation propre d'un oscillateur mécanique. Dans les deuxième et troisième parties, sont abordés des exemples de mesure de forces dues à des charges surfaciques capacitives ou à des charges stockées au voisinage de la surface du matériau étudié. Enfin la quatrième partie exploitera des résultats expérimentaux.

Un grand soin devra être apporté aux schémas et aux applications numériques.

Données numériques :

Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19}$ C
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12}$ F $\cdot$ m^{-1}

I - Oscillateur mécanique

1. On considère l'oscillateur mécanique représenté figure 1, composé d'une masse m et d'un ressort de constante de raideur k, l'ensemble étant suspendu au point P. La cote z_M du point M situé à la base de la masse est notée $z_0 + \delta(t)$, où z_0 désigne la cote de la position d'équilibre de M lorsque P est fixe en P_0. Ce point P est maintenant animé autour de P_0 d'un mouvement sinusoïdal vertical, imposé par un vibreur et donné par $a(t) = a_0 \cos \omega t$ avec $a_0 > 0$. On suppose de plus que la masse m est soumise à une force de frottement fluide de type visqueux $\vec{F}_f = -\beta \dot{\delta}\, \vec{e}_z$ avec $\dot{\delta} = \dfrac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t}$ et $\beta > 0$.

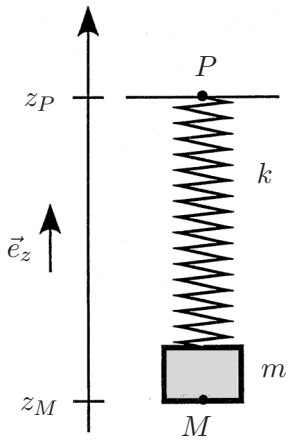

Figure 1

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

a) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\delta(t)$.

b) On se place en régime sinusoïdal forcé ; on note respectivement A et B les amplitudes complexes associées à $a(t) = \mathcal{R}e\left(A\,e^{j\omega t}\right)$ et à la vitesse $\dot{\delta}$ de la masse. Calculer le rapport B/A ; le mettre sous la forme $(k/\beta)H(\omega)$ et exprimer $H(\omega)$ en fonction de ω, à l'aide des paramètres ω_0 et Q, où $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $Q = \dfrac{1}{\beta}\sqrt{mk}$.

c) Donner l'allure du graphe du module de $H(\omega)$ en fonction de ω ; on supposera $Q \gg 1$. Que représentent ω_0 et Q ?

d) Faire un graphe de l'argument φ de $H(\omega)$ en fonction de ω. Sur quelle plage de pulsations se produisent essentiellement les variations de φ ? Calculer $\left.\dfrac{d\varphi}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}$ en fonction de Q et ω_0.

2. On cherche à déterminer expérimentalement la valeur de ω_0. Deux capteurs donnent l'un une tension $u_A(t) = u_0 \cos \omega t$ proportionnelle à $a(t)$, l'autre une tension $u_B(t)$ proportionnelle à la vitesse $\dot{\delta}(t)$ de M.

a) Ces tensions sont appliquées aux deux entrées d'un circuit multiplieur qui donne une tension de sortie $u_S(t)$ proportionnelle à leur produit, soit : $u_S(t) = K\,u_A(t)\,u_B(t)$ où K est une constante. Montrer que $u_S(t)$ possède une composante continue et une composante sinusoïdale. Déterminer la dépendance en φ de la composante continue. Proposer un montage électrique simple pour éliminer la composante sinusoïdale de $u_S(t)$. La mesure en fonction de ω de cette composante continue permet-elle de déterminer ω_0 avec une grande sensibilité ?

b) Le capteur de vitesse est remplacé par un capteur de position de la masse délivrant une tension proportionnelle à $\delta(t)$. On utilise le même circuit multiplieur que précédemment et on détecte la composante continue de la tension de sortie. Quelle est sa dépendance en φ ? Ce montage permet-il une mesure plus précise de ω_0 ? Justifier votre réponse.

c) On mesure expérimentalement ω_0 en ajustant la valeur de ω afin d'obtenir $\varphi = 0$. Exprimer à l'aide de Q l'incertitude relative $\delta\omega_0/\omega_0$ de cette mesure pour une incertitude expérimentale $\delta\varphi$ sur φ.

d) *Application numérique* : estimer $\delta\omega_0/\omega_0$ pour $\delta\varphi = 8 \times 10^{-3}$ rad et $Q = 200$. Quelle est l'incertitude sur la fréquence propre de l'oscillateur, sachant qu'elle est voisine de 60 kHz ?

3. La masse de l'oscillateur mécanique est maintenant soumise à une force supplémentaire verticale appliquée au point M. On suppose que son amplitude $F_C(z_M)$ varie avec la cote $z_M = z_0 + \delta(t)$ du point M. On néglige la variation de la position d'équilibre statique z_0 due à la force F_C.

a) En se limitant à de faibles déplacements autour de z_0, montrer que l'oscillateur mécanique présente une variation apparente de constante de raideur δk que l'on exprimera à l'aide de la fonction $F_C(z_M)$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

b) En déduire la variation de pulsation propre de l'oscillateur, que l'on exprimera en fonction de ω_0, δk et k, en supposant $|\delta k| \ll k$.

c) On suppose fixée l'incertitude expérimentale $\delta\varphi$ comme au **I.2.d)**. Quelle variation relative minimale de la constante de raideur peut être détectée ? Commenter le rôle du facteur de qualité.

*La microscopie à force électrostatique utilise un oscillateur mécanique équivalent à celui décrit dans la partie **I**. Afin d'obtenir une résolution spatiale submicronique, on se sert en pratique d'un dispositif de très faibles dimensions, où l'aire de l'extrémité M de l'oscillateur est de l'ordre de 100 nm^2. En utilisant des céramiques piézoélectriques, on est de plus capable de déplacer cet oscillateur au-dessus de la surface à étudier. La précision de positionnement de l'oscillateur est meilleure que le nanomètre dans les trois directions de l'espace. On enregistre alors en tout point les variations de pulsation propre de l'oscillateur, ce qui permet d'établir une cartographie des effets électrostatiques à la surface du matériau.*

*On cherche dans les parties **II** et **III** à préciser les forces électrostatiques pouvant agir sur l'oscillateur, afin de déterminer la sensibilité de ce dispositif de microscopie.*

II - Mesure de forces capacitives

1. On utilise une géométrie plane pour décrire la surface de l'extrémité M de l'oscillateur et la surface du matériau, toutes deux supposées conductrices et parallèles. Le condensateur plan ainsi formé (figure 2) est relié à un générateur de tension U. On note S l'aire des faces en regard, ℓ la distance entre ses deux armatures, et $C(\ell)$ sa capacité. L'oscillation de l'armature M est d'amplitude $|\delta| \ll \ell$. On néglige tout effet de bord dans les calculs d'électrostatique. On cherche à calculer la force capacitive $F_{\text{capa}}\vec{e}_z$ s'exerçant sur l'armature M qui constitue la masse oscillante.

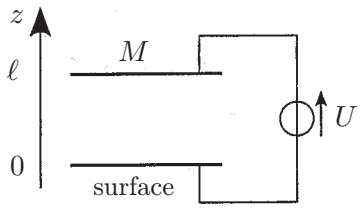

Figure 2

a) Pour cela on considère tout d'abord le modèle d'une distribution surfacique de charges, plane et d'extension infinie, de densité σ uniforme et placée dans le vide. En utilisant les propriétés de symétrie de cette distribution, préciser, de chaque côté du plan de charges, la direction du champ électrique et déterminer sa valeur en fonction de σ et de ε_0.

b) Relier la valeur du champ électrique entre les armatures du condensateur à la densité surfacique de charge σ de l'armature haute. Déduire de ces résultats que le champ électrique créé par les charges de l'armature basse au niveau de l'armature haute est la moitié du champ électrique total au voisinage de cette armature.

c) Exprimer F_{capa} en fonction de la charge de l'armature haute et du champ électrique total au voisinage de cette armature. En déduire : $F_{\text{capa}} = -\varepsilon_0\, SU^2/2\ell^2$. Commenter le signe de F_{capa}.

d) En déduire l'expression de la variation $\delta\omega_{\text{capa}}$ de pulsation propre de l'oscillateur.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

2. La surface à étudier présente un relief d'épaisseur $h \ll \ell$ et d'aire $S' \gg S$. L'oscillateur, toujours connecté au générateur de tension U, est déplacé rectilignement au-dessus de la surface et parallèlement à celle-ci (figure 3).

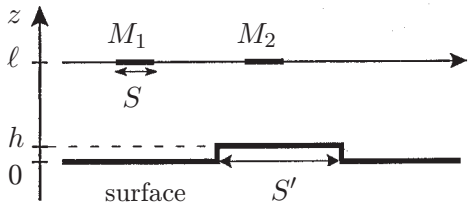

Figure 3

a) Quelle est la variation $\delta\omega_h = \delta\omega_{\text{capa}}(2) - \delta\omega_{\text{capa}}(1)$ de $\delta\omega_{\text{capa}}$ entre les points M_2 et M_1 ?

b) *Application numérique* : calculer la variation relative de pulsation propre de l'oscillateur au passage du relief pour $U = 12$ V, $h = 10$ nm, $\ell = 80$ nm, $S = 100$ nm^2, et $k = 1$ N·m^{-1}. Ce relief peut-il être détecté expérimentalement ?

c) Calculer la variation de force $F_{\text{capa}}(2) - F_{\text{capa}}(1)$ correspondante.

d) *Application numérique* : calculer l'allongement du ressort de l'oscillateur au passage sur le relief. Commenter.

III - Mesure de charges

Dans cette partie, on cherche à détecter, par microscopie à force électrostatique, des charges électriques stockées dans un isolant déposé sur la surface conductrice étudiée. Les charges sont uniformément réparties à l'intérieur du volume défini par $0 < z < h$ (zone grisée de la figure 4). On note ρ la densité volumique de charges dans cet espace que l'on assimile au vide ; une zone d'aire S contient une charge totale $q = \rho S h$. L'origine des potentiels électriques est choisie sur la surface conductrice étudiée.

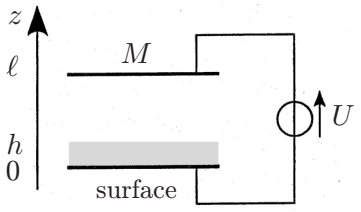

Figure 4

1. Dans cette question, la surface de l'oscillateur et la surface conductrice sont placées au même potentiel ($U = 0$).

a) Donner les équations vérifiées par le potentiel électrostatique $V(z)$ dans chacune des régions $0 < z < h$ et $h < z < \ell$ situées entre les armatures du condensateur.

b) Exprimer $V(z)$. Montrer que le champ électrostatique en $z = \ell$ vaut $\rho h^2 / 2\varepsilon_0 \ell$.

c) Faire un graphe du potentiel $V(z)$; on prendra $h/\ell = 0,2$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

2. On suppose maintenant $U \neq 0$.

a) Montrer que la fonction $V(z)$ est maintenant la somme de la fonction calculée à la question précédente et de celle correspondant au condensateur connecté au générateur de tension U en l'absence de charges.

b) Représenter graphiquement $V(z)$.

3. On cherche maintenant à calculer la force d'origine électrostatique qui s'exerce sur l'armature mobile du condensateur en présence de la charge volumique q.

a) Déduire de la question précédente la valeur du champ électrique $E(\ell)$ au voisinage immédiat de l'armature haute mobile, puis la densité surfacique de charge de cette armature.

b) Par une démarche similaire à celle du **II.1**, exprimer la force cherchée en fonction du champ électrique $E(\ell)$, puis en fonction de U et q.

c) Distinguer dans l'expression obtenue les termes capacitifs des termes liés à la charge q. En supposant négligeable le terme de charges en q^2, donner l'expression de la variation $\delta\omega_q$ de la pulsation propre de l'oscillateur due à la charge q.

d) Comment distinguer expérimentalement entre une variation de pulsation propre de l'oscillateur liée à un effet de relief de celle liée à un effet de charges ?

4. Les charges q sont en pratique stockées dans un matériau qui atténue d'un facteur ε_r la variation de pulsation propre $\delta\omega_q$.

a) *Application numérique* : en utilisant les données numériques du **II.2.b)**, estimer la charge minimale $q_{\min}$ pouvant être détectée ; à quel nombre de charges élémentaires correspond $q_{\min}$? On donne $\varepsilon_r = 12$.

b) L'autre effet du matériau dans lequel sont stockées les charges est de modifier les termes de forces capacitives ; la présence du matériau de hauteur h et d'aire S' s'apparente alors à un relief de hauteur h sur la surface (cf. **II.2** et figure 5). On suppose que l'oscillateur est déplacé rectilignement au-dessus de la surface et parallèlement à celle-ci.

Calculer le rapport $R = \delta\omega_q/\delta\omega_h$ entre les effets de charge et les effets capacitifs. Exprimer ce rapport en fonction de q, ε_r et de la charge Q_M stockée sur l'armature haute dans la situation du **II.1** ($h = 0$, $U \neq 0$). Faut-il se placer au plus près de la surface du matériau pour améliorer la visibilité du terme de charges ?

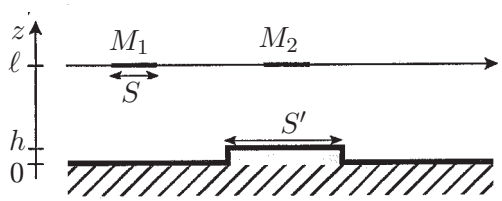

Figure 5

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

IV - Analyse de résultats expérimentaux

Un microscope à force électrostatique utilise comme système oscillant une lame souple (ou « cantilever ») portant à l'extrémité mobile une pointe métallisée ; la figure 6 donne un cliché d'un tel système obtenu par un microscope électronique à balayage (MEB).

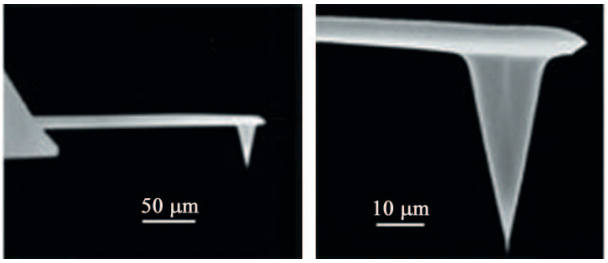

Figure 6

La figure 7 donne trois enregistrements de la variation de la fréquence de résonance du système oscillant lorsque la pointe est déplacée parallèlement à une surface conductrice sur laquelle est déposée un îlot de silicium de 100 nm de diamètre. Une charge électrique q peut être transférée à cet îlot par une technique « d'injection ».

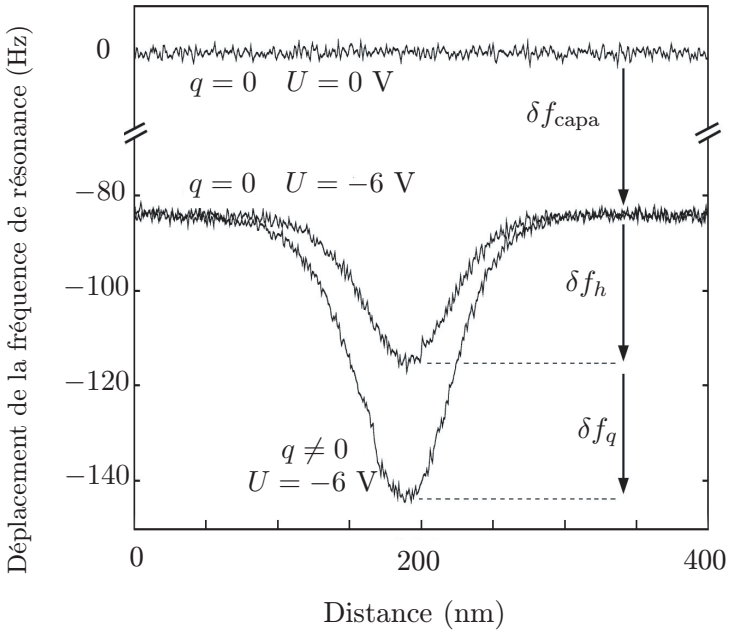

Figure 7

Les valeurs de la tension U appliquée et de la charge q correspondant à ces enregistrements sont :

- pour le premier (à partir du haut de la figure) $U = 0$ et $q = 0$
- pour le deuxième $U = -6$ V et $q = 0$
- pour le troisième $U = -6$ V avec $q \neq 0$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

Bien que le modèle de géométrie plane étudié dans les parties précédentes ne soit pas directement utilisable, il donne des interprétations qualitatives correctes mais les évaluations de $\delta\omega_{\text{capa}}$ et de $\delta\omega_h$ (cf. **II.1** et **2**) doivent être modifiées pour tenir compte de la géométrie réelle des surfaces en regard. Cependant, on montre que le rapport $R = \delta\omega_q/\delta\omega_h$ suit la loi obtenue en **III.4.b** à condition d'utiliser une valeur adaptée (valeur « effective ») de la surface S.

1. Préciser le signe de q correspondant au troisième enregistrement.

2. On donne : pour le silicium, $\varepsilon_r = 12$, pour le système oscillant $\ell = 100$ nm. Pour l'îlot de l'expérience, la valeur effective de S est $2\,000$ nm^2.

À partir des enregistrements, déterminer R. En déduire la valeur de q et le nombre n_q de charges élémentaires correspondant.

* *
*

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

Rapport de MM. T. MELIN et B. MOSSER, correcteurs.

Le sujet proposé cette année traitait du principe de fonctionnement d'un microscope à force électrostatique, dispositif dérivé du microscope à force atomique et permettant de réaliser des cartographies des gradients de forces coulombiennes à la surface d'échantillons, avec une résolution spatiale de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres.

Le principe de la mesure de gradients de forces à l'aide d'un oscillateur mécanique faisait l'objet de la première partie du problème, les deuxième et troisième parties de l'énoncé s'attachant à la détection de forces capacitives ou liées à la présence de charges au voisinage de la surface d'un matériau conducteur. Enfin, la quatrième partie proposait l'analyse de résultats expérimentaux.

Les questions du problème étaient souvent liées, mais le nombre important de résultats intermédiaires donnés par l'énoncé permettait d'éviter tout blocage, et ainsi de pouvoir traiter le sujet dans son ensemble.

Les notes des candidats français du concours (moyenne 8.3, écart-type 4.2) se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leq \mathrm{N} < 4$	16%
$4 \leq \mathrm{N} < 8$	34%
$8 \leq \mathrm{N} < 12$	31%
$12 \leq \mathrm{N} < 16$	13%
$16 \leq \mathrm{N} \leq 20$	6%

L'écart-type élevé dénote une très grande diversité de niveaux de compréhension des phénomènes d'électrostatique, allant du candidat incapable de déterminer convenablement le champ électrique entre les armatures d'un condensateur plan, à celui ayant compris dans son ensemble le principe de l'instrument décrit dans ce problème.

Parmi les points notables de cette année, on remarque :

- des notions mathématiques de base mal maîtrisées (différenciations, développements limités, trigonométrie simple, tracé de courbes...) ;
- la sempiternelle confusion entre les qualificatifs « constant » et « uniforme » ;
- un nombre beaucoup trop élevé de copies se permettant une présentation bâclée, sale, illisible, ou les trois à la fois ;
- une trop faible attention accordée aux applications numériques : les candidats se satisfont d'une expression mathématique pour répondre aux questions, alors que bien souvent l'application numérique et les commentaires - tout aussi importants en terme de raisonnement physique mais non traités - pourraient rapporter de précieux points supplémentaires. Il est enfin assez déroutant de constater que les applications numériques de formules simples peuvent rester des exercices périlleux, même pour des candidats de bonne volonté.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

Partie I

1a) Une première question donne souvent le ton de la copie. Au pire, un bilan de forces bâclé, des signes distribués au hasard, l'absence de schéma pour préciser les différents termes... se sont conjugués pour aboutir à un résultat incorrect. Également, de nombreuses copies se rapportent à des exercices classiques vus en cours, et font intervenir des termes de forces d'inertie, absents du problème posé. Enfin, que penser de ces quelques copies qui exhibent en une ligne une formule (juste ou fausse) sans autre forme de justification ?

1b,c) Pour les candidats ayant laissé des termes constants dans la réponse à la première question, une dérivée peu scrupuleuse de l'équation différentielle a permis un calcul de $\mathcal{H}(\omega)$. Le tracé du module de la fonction de transfert a souvent été imprécis, et ne tenait pas compte de l'hypothèse faite sur le facteur de qualité.

1d) Comme à la question précédente, une étude asymptotique aux fréquences très petites ou très grandes devant la fréquence de résonance permettait de tracer un graphe précis. La plage de pulsations propres correspondant à l'essentiel des variations de φ dépend évidemment du facteur de qualité de l'oscillateur : les trop nombreuses réponses comme $[\omega_0/10, 10\omega_0]$ ou $[0, 10\omega_0]$ ne sont donc pas satisfaisantes. Le calcul demandé de la pente à la pulsation de résonance s'est avéré décevant : calculs au signe près malgré un schéma correct, problèmes d'homogénéité, alors qu'une simple vérification dimensionnelle aurait permis d'éviter plus de 2/3 des erreurs commises sur le calcul de pente.

2a) Cette question n'a pas été bien traitée, par manque d'intuition physique d'une part - à savoir que c'est le déphasage entre les deux signaux qui importe et non leur amplitude - et par une maîtrise insuffisante d'un outil mathématique de base (passer d'un produit à une somme de fonctions cosinus). Par ailleurs, le montage électrique demandé a révélé une grande confusion entre les notions de *filtrage* et de *redressement* d'un signal électrique. Dans le cas présent, redresser la composante alternative était tout à fait inadéquat.

2b) La transformation de $\cos(\pi/2-\varphi)$ en une forme plus simple n'a pas été immédiate pour bon nombre de copies.

2c,d) Une incertitude relative n'a pas à être signée. Pour le calcul de variation de fréquence propre, trop de copies ont présenté une valeur numérique juste mais une unité fausse, par confusion entre pulsation (rad.s^{-1}) et fréquence (Hz).

3a) La majorité des copies a cherché à établir une nouvelle équation différentielle, alors que nul n'était besoin de faire appel au principe fondamental de la dynamique pour répondre à cette question. Également, la maîtrise insuffisante de l'outil mathématique - un développement au 1^{er} ordre - a empêché une bonne approche physique, pour relier la variation apparente de la constante de raideur au gradient de la force exercée.

3b) Pour beaucoup de copies, les détours effectués lors de la différentiation de ω_0 font que le résultat n'est pas exprimé en fonction de ω_0, δk et k.

3c) Les commentaires demandés à une question ne doivent pas être négligés. Et les

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

exprimer de manière simple et concise reste très apprécié lors de la correction, car cela permet de juger de la qualité d'expression de futurs ingénieurs. Traduire : il y a là des points précieux à engranger.

Partie II

1a,b,c) Ces trois questions relèvent de l'exercice de cours.Non seulement savoir déterminer le champ électrique dans un condensateur plan sans effet de bord doit être acquis, mais de plus le faire avec une argumentation ordonnée, sérieuse et concise est indispensable pour un candidat qui souhaite une réussite à ce concours. Ceci implique que la notation est stricte en ce qui concerne les justifications (symétries des distributions de charges et conséquences, signes des expressions obtenues) ainsi que les raisonnements (superposition des distributions de charges). Enfin, des copies, trop nombreuses, utilisent un jargon cryptique, comme cet argument observé à plusieurs reprises : « le plan Π est Π^+, donc ... », sans même une définition du plan Π, et encore moins de l'appellation Π^+.

1d) Le résultat demandé ici doit être signé, au contraire de la question **I 3b)**.

2a) L'énoncé présentait une simplification ($h \ll l$). Des candidats trop scrupuleux et pas assez physiciens se sont compliqué la tâche en estimant que l'on ne peut pas admettre au sens strict l'inégalité 10 nm$\ll$80 nm. Ce raffinement est-il nécessaire au vu des autres hypothèses simplificatrices du modèle (hypothèse de condensateur plan, à comparer au cliché de la figure 6). Notons que le développement limité a été souvent malmené.

2b) Même avec une réponse correcte au **1a)**, cette question fut très sélective...

2c) Commentaire identique à celui de la question **2a)**. En outre, au regard de la question **1c)**, il était plutôt malheureux de se tromper ici sur le signe de $F_{\text{capa}}(2) - F_{\text{capa}}(1)$.

2d) Avec une puissance troisième au dénominateur, la valeur de cette application numérique a oscillé dans un intervalle compris entre 10^{-2} m et 10^{-22} m. Il n'est pas interdit de reprendre un calcul qui aboutit à un résultat si différent des dimensions nanométriques en jeu. Enfin, pour les copies aboutissant à la bonne valeur (picométrique), le commentaire attendu se devait de dépasser le constat « c'est petit ». Petit, certes, mais... par rapport à quoi ?

Partie III

1a) Trop d'erreurs dans l'énoncé de l'équation de Poisson...

1b) ... et beaucoup plus encore lors de son intégration. Cette question contenait le seul calcul un peu technique du problème, mais la difficulté a beaucoup plus résidé dans la formulation de la continuité du champ et du potentiel.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.