ESCL 1998

Mathématiques I Option Economique

Exercice 1

La fonction logarithme népérien est notée $\ln$.

1. Soit $x \in [-1;1[$.

   a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;1[$:

   $$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

   b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;x]$:

   $$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$$

   c) Etablir, pour tout n de $\mathbb{N}$:

   $$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-x)}$$

   d) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

   En particulier, montrer : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2$.

2. Un joueur lance une pice équilibrée jusqu' l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers $(n \in \mathbb{N}^*)$ pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.

   Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Exercice 2

Dans l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3, on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
.

1. a) Calculer A^2 et A^3 .
   b) En déduire que A n'est pas inversible et que A admet 0 pour unique valeur propre.
   c) Déterminer une base du sous-espace propre de A associé la valeur propre 0.
   d) La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On note, pour tout réel a, $M(a) = I + 2\,a\,A + 2\,a^2\,A^2$, et E l'ensemble des matrices $M(a)$ lorsque a décrit $\mathbb{R}$.
   a) Calculer, pour tout couple (a, b) de réels, le produit $M(a)M(b)$ et montrer que ce produit appartient E.
   b) En déduire que, pour tout réel a, $M(a)$ est inversible et préciser son inverse.
3. Soit a un réel non nul.
   a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $M(a)$.
   b) Calculer $(M(a) - I)^3$.
   En déduire que $M(a)$ admet 1 pour seule valeur propre.
   Préciser une base du sous-espace propre de $M(a)$ associé la valeur propre 1.
   c) La matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 3

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.
On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la premire boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la premire boule blanche.

   a) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

   b) Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

On définit le couple de variables aléatoires $(X,\ Y)$ valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante :

pour tout $(i,\ j) \in (\mathbb{N}_n^*)^2$, $\big(X = i \mathrm{et} Y = j\big)$ est l'évnement

$''$ les i premires boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i + j + 1)^{\text{ieme}}$ est blanche

ou

les i premires boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i + j + 1)^{\text{ieme}}$ est verte $''$.

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

   b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$.

   c) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

3. Montrer, pour tout $(i,\ j)$ de $(\mathbb{N}_n^*)^2$:

$$P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

4. a) En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

   b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

5. a) Etablir que, si $p \neq \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes (on pourra envisager $P(X = 1 \text{ et } Y = 1)$).

   b) Démontrer que, si $p = \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 1998

EM-LYON : MATH III

CORRIGE

EXERCICE–I

QUESTION–1

1–a) Pour $t \in [-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$. **C'est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $t \neq 1$ et de premier terme 1.**

Cette égalité équivaut à

$$\boxed{\forall t \in [-1,1[,\ \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}.}$$

1–b)

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k\right| &= \left|\frac{t^{n+1}}{1-t}\right| \\ &= \frac{|t^{n+1}|}{|1-t|} = \frac{|t|^{n+1}}{1-t} \quad \text{car } 1-t>0.\end{aligned}$$

Or $t \in [-1,x] \iff -1 \leq t \leq x \iff -x \leq -t \leq 1 \iff 0 < 1-x \leq 1-t \leq 2$ (**on a ajouté** 1 **aux trois termes de l'encadrement**) et l'on sait que $x<1$.

On prend les inverses (**inégalités entre nombres** >0), on obtient :

$0 < \dfrac{1}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-x}$ et **l'on multiplie les trois termes par** $|t|^{n+1} \geq 0$. Finalement

$$\frac{|t^{n+1}|}{1-t} \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-x}.$$

$$\boxed{\text{En résumé, } \forall x \in [-1,1[,\ \forall t \in [-1,x],\ \left|\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k\right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-x}.}$$

1–c)

On envisage 2 cas : $x \geq 0$ et $x < 0$.

$\boxed{\bullet \quad x \geq 0.}$

On intègre l'inégalité précédente entre 0 et x. **Les bornes sont dans l'ordre croissant**, donc

$$\int_0^x \left|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right|dt \quad \leq \int_0^x \frac{|t|^{n+1}}{1-x}dt \quad \text{or } t\in[0,x] \Longrightarrow t\geq 0, \quad \text{donc}$$
$$\int_0^x \left|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right|dt \quad \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-x}dt = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^{n+1}dt, \quad \text{soit}$$
$$\int_0^x \left|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right|dt \quad \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)}.$$

Or $0\leq x\leq 1 \Longrightarrow 0\leq x^{n+2}\leq 1$. On divise cette inégalité par $(n+2)(1-x)>0$ et l'on obtient :

$$\frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)} \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)},$$

donc $\displaystyle\int_0^x \left|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right|dt \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)}.$ **(1)**

De plus,

$$\left|\int_0^x \left(\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right)dt\right| \quad \leq \int_0^x \left|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right|dt \ \textbf{ inégalité classique}$$

et bornes dans l'ordre croissant

$$\text{Or} \quad \int_0^x \left(\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right)dt \quad = \Big[-\ln(1-t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{k+1}}{k+1}\Big]_0^x$$
$$= -\ln(1-x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}\ ,$$

donc

$$\left|-\ln(1-x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}\right| \quad \leq \int_0^x \left|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right|dt$$

et en tenant compte de l'inégalité **(1)**, on obtient

$$\boxed{\left|-\ln(1-x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}\right| \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)}.}$$

$\boxed{\bullet \quad x<0.}$

On intègre entre x et 0 (**les bornes sont alors dans l'ordre croissant**).
On obtient

$$\left|\int_x^0 \left(\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right)dt\right| \quad \leq \int_x^0 \left|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right|dt$$
$$\int_x^0 \left(\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right)dt \quad = -\Big[-\ln(1-t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{k+1}}{k+1}\Big]_0^x$$
$$= -\Big(-\ln(1-x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big)\ ;$$

donc

$$\left|-\Big(-\ln(1-x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big)\right| \leq \int_x^0 \left|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right|dt$$
$$\left|-\ln(1-x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}\right| \leq \int_x^0 \frac{|t|^{n+1}}{1-x}dt.$$