ESCL 1998

Mathématiques I Option Economique

Exercice 1

La fonction logarithme népérien est notée $\ln$.

1. Soit $x \in [-1;1[$.

   a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;1[$:

   $$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

   b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;x]$:

   $$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$$

   c) Etablir, pour tout n de $\mathbb{N}$:

   $$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-x)}$$

   d) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

   En particulier, montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2$.

2. Un joueur lance une pice équilibrée jusqu' l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers $(n \in \mathbb{N}^*)$ pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.

   Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Exercice 2

Dans l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3, on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
.

1. a) Calculer A^2 et A^3 .

   b) En déduire que A n'est pas inversible et que A admet 0 pour unique valeur propre.

   c) Déterminer une base du sous-espace propre de A associé la valeur propre 0.

   d) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. On note, pour tout réel a, $M(a) = I + 2\,a\,A + 2\,a^2\,A^2$, et E l'ensemble des matrices $M(a)$ lorsque a décrit $\mathbb{R}$.

   a) Calculer, pour tout couple (a, b) de réels, le produit $M(a)M(b)$ et montrer que ce produit appartient E.

   b) En déduire que, pour tout réel a, $M(a)$ est inversible et préciser son inverse.

3. Soit a un réel non nul.

   a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $M(a)$.

   b) Calculer $(M(a) - I)^3$.
   En déduire que $M(a)$ admet 1 pour seule valeur propre.
   Préciser une base du sous-espace propre de $M(a)$ associé la valeur propre 1.

   c) La matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Exercice 3

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.

On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la premire boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la premire boule blanche.

   a) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

   b) Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

On définit le couple de variables aléatoires $(X,\ Y)$ valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante :

pour tout $(i,\ j) \in (\mathbb{N}_n^*)^2$, $\big(X = i \text{et} Y = j\big)$ est l'évnement

″ les i premires boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i + j + 1)^{\text{ieme}}$

est blanche

ou

les i premires boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i + j + 1)^{\text{ieme}}$

est verte ″.

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

   b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$.

   c) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

3. Montrer, pour tout $(i,\ j)$ de $(\mathbb{N}_n^*)^2$:

$$P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

4. a) En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

   b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

5. a) Etablir que, si $p \neq \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes (on pourra envisager $P(X = 1 \text{ et } Y = 1)$).

   b) Démontrer que, si $p = \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 1998

EM-LYON : MATH III

CORRIGE

EXERCICE–I

QUESTION–1

1–a) Pour $t \in [-1,1[$, $\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$. **C'est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $t \neq 1$ et de premier terme 1.**

Cette égalité équivaut à

$$\boxed{\forall t \in [-1,1[,\ \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}.}$$

1–b)

$$\left|\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k\right| = \left|\frac{t^{n+1}}{1-t}\right|$$

$$= \frac{|t^{n+1}|}{|1-t|} = \frac{|t|^{n+1}}{1-t} \quad \text{car } 1-t>0.$$

Or $t \in [-1,x] \iff -1 \leq t \leq x \iff -x \leq -t \leq 1 \iff 0 < 1-x \leq 1-t \leq 2$ (**on a ajouté 1 aux trois termes de l'encadrement**) et l'on sait que $x<1$.

On prend les inverses (**inégalités entre nombres >0**), on obtient :

$0 < \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$ et **l'on multiplie les trois termes par** $|t|^{n+1} \geq 0$. Finalement

$$\frac{|t^{n+1}|}{1-t} \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-x}.$$

$$\boxed{\text{En résumé, } \forall x \in [-1,1[,\ \forall t \in [-1,x],\ \left|\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k\right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-x}.}$$

1–c)

On envisage 2 cas : $x \geq 0$ et $x < 0$.

- $x \geq 0$.

On intègre l'inégalité précédente entre 0 et x. **Les bornes sont dans l'ordre croissant**, donc

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

$$\int_0^x \Big|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^n t^k\Big|dt \quad \le \int_0^x \frac{|t|^{n+1}}{1-x}dt \quad \text{or } t\in[0,x]\Longrightarrow t\ge 0, \quad \text{donc}$$

$$\int_0^x \Big|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^n t^k\Big|dt \quad \le \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-x}dt=\frac{1}{1-x}\int_0^x t^{n+1}dt, \quad \text{soit}$$

$$\int_0^x \Big|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^n t^k\Big|dt \quad \le \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)}.$$

Or $0\le x\le 1\Longrightarrow 0\le x^{n+2}\le 1$. On divise cette inégalité par $(n+2)(1-x)>0$ et l'on obtient :

$$\frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)}\le\frac{1}{(n+2)(1-x)},$$

$$\text{donc } \int_0^x \Big|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^n t^k\Big|dt\le\frac{1}{(n+2)(1-x)}. \qquad \textbf{(1)}$$

De plus,

$$\Big|\int_0^x\Big(\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^n t^k\Big)dt\Big| \quad \le \int_0^x\Big|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^n t^k\Big|dt \ \textbf{inégalité classique et bornes dans l'ordre croissant}$$

$$\text{Or} \quad \int_0^x\Big(\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^n t^k\Big)dt = \Big[-\ln(1-t)-\sum_{k=0}^n\frac{t^{k+1}}{k+1}\Big]_0^x$$

$$= -\ln(1-x)-\sum_{k=0}^n\frac{x^{k+1}}{k+1}\ ,$$

donc

$$\Big|-\ln(1-x)-\sum_{k=0}^n\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big| \quad \le\int_0^x\Big|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^n t^k\Big|dt$$

et en tenant compte de l'inégalité **(1)**, on obtient

$$\boxed{\Big|-\ln(1-x)-\sum_{k=0}^n\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|\le\frac{1}{(n+2)(1-x)}.}$$

- $x<0$.

On intègre entre x et 0 (**les bornes sont alors dans l'ordre croissant**).
On obtient

$$\Big|\int_x^0\Big(\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^n t^k\Big)dt\Big| \quad \le\int_x^0\Big|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^n t^k\Big|dt$$

$$\int_x^0\Big(\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^n t^k\Big)dt = -\Big[-\ln(1-t)-\sum_{k=0}^n\frac{t^{k+1}}{k+1}\Big]_0^x$$

$$= -\Big(-\ln(1-x)-\sum_{k=0}^n\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big)\ ;$$

donc

$$\Big|-\Big(-\ln(1-x)-\sum_{k=0}^n\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big)\Big|\le\int_x^0\Big|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^n t^k\Big|dt$$

$$\Big|-\ln(1-x)-\sum_{k=0}^n\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|\le\int_x^0\frac{|t|^{n+1}}{1-x}dt.$$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.