



## PROBLEMES DE MATHEMATIQUES



### ANALYSE

### ENONCE DU PROBLEME

#### ENONCE-6

L'objet de ce problème est l'étude d'approximations de  $x \mapsto \ln(1+x)$  par des fonctions affines  $x \mapsto ax + b$  sur l'intervalle  $I = [0, 1]$ .

Dans la suite, on considère pour tout réel  $a$  la fonction  $f_a$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f_a(x) = \ln(1+x) - ax$$

#### PARTIE A

On se propose dans cette partie de déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour lesquels l'expression suivante est minimale :

$$N_1(a, b) = \int_0^1 (\ln(1+x) - ax - b)^2 dx$$

1)–a) Etant donné deux réels  $B$  et  $C$ , on demande de déterminer le minimum de l'expression suivante lorsque  $x$  décrit  $\mathbb{R}$  ainsi que la valeur de la variable  $x$  qui réalise ce minimum :

$$x^2 - 2Bx + C$$

b) Etant donné une application continue  $g$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , en déduire le minimum de l'expression suivante lorsque  $b$  décrit  $\mathbb{R}$  ainsi que la valeur de  $b$  qui réalise ce minimum :

$$\int_0^1 (g(x) - b)^2 dx$$

2) Calculer les trois intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx ; \int_0^1 (\ln(1+x))^2 dx ; \int_0^1 x \ln(1+x) dx$$

3) On pose :

$$F_1(a) = \int_0^1 f_a^2(x) dx - \left( \int_0^1 f_a(x) dx \right)^2$$

a) Expliciter  $F_1(a)$ .

b) Déterminer le minimum de  $F_1$  ainsi que la valeur du réel  $a$  qui le réalise.

4) Déduire des résultats précédents le minimum  $K_1$  de l'expression  $N_1(a, b)$  ainsi que la valeur du couple  $(a, b)$  qui le réalise.

#### PARTIE B

On se propose dans cette partie de déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour lesquels l'expression suivante est minimale :

$$N_2(a, b) = \max_{0 \leq x \leq 1} |\ln(1+x) - ax - b|$$

1) Pour toute application  $g$  continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , on note :

$$M(g) = \max_{0 \leq x \leq 1} g(x) ; m(g) = \min_{0 \leq x \leq 1} g(x) ; \mu(g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)|$$

En utilisant des réels  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $g(x_1) = M(g)$  et  $g(x_2) = m(g)$  (on en établira l'existence), établir que pour tout nombre réel  $b$ , on a

$$\begin{cases} \mu(g-b) = \frac{M(g) - m(g)}{2} & \text{si } b = \frac{M(g) + m(g)}{2} \\ \mu(g-b) > \frac{M(g) - m(g)}{2} & \text{si } b \neq \frac{M(g) + m(g)}{2} \end{cases}$$

**2)–a)** Prouver que la dérivée de la fonction  $f_a$  s'annule sur  $I$  si et seulement si le réel  $a$  appartient à un intervalle  $[\alpha, \beta]$  que l'on précisera.

**b)** En déduire les variations de la fonction  $f_a$  en distinguant les trois cas :  $a < \alpha$  ;  $\alpha \leq a \leq \beta$  et  $a > \beta$ .

**3)** On pose

$$F_2(a) = M(f_a) - m(f_a)$$

Expliciter l'expression de  $F_2(a)$  en fonctions des valeurs de  $a$ . Etudier la continuité et la dérivabilité de  $F_2$  et tracer sa courbe représentative.

**4)** Déduire des résultats précédents le minimum  $K_2$  de l'expression  $N_2(a, b)$ , ainsi que les valeurs de  $a$  et  $b$  qui le réalisent.

**5)** Vérifier l'inégalité suivante :  $K_1 \leq K_2^2$  (on donne  $\ln 2 \cong 0.69$ ).

Etait-elle prévisible ?

## CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 5

### CORRIGE-6 :

#### PARTIE A

1- a) \_\_\_\_\_

Notons  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2Bx + C$ . Cette application est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (c'est une application polynomiale) et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(x - B)$  ; ce qui permet de dresser le tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$B$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f$	$\searrow$		$\nearrow$

Il apparaît clairement que  $f$  admet au point  $x = B$  un minimum et ce minimum vaut  $f(B) = B^2 - 2B^2 + C = C - B^2$

b) \_\_\_\_\_

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (g(x) - b)^2 dx &= \int_0^1 (g^2(x) - 2bg(x) + b^2) dx \\
 &= \int_0^1 g^2(x) dx - 2b \int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 b^2 dx \text{ par linéarité de l'intégration} \\
 &= \int_0^1 g^2(x) dx - 2b \int_0^1 g(x) dx + b^2 \\
 &= b^2 - 2b \int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 g^2(x) dx
 \end{aligned}$$

On est ramené à la question a) dans laquelle  $x = b$ .

l'expression  $\int_0^1 (g(x) - b)^2 dx$  est minimum pour  $b = \int_0^1 g(x) dx$   
 et la valeur du minimum est  $\int_0^1 g^2(x) dx - \left( \int_0^1 g(x) dx \right)^2 \geq 0$  ;  
 cette valeur est  $\geq 0$  car  $\forall b \in \mathbb{R}, \int_0^1 (g(x) - b)^2 dx \geq 0$  (les bornes sont dans l'ordre croissant)

2) \_\_\_\_\_

• Une primitive sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la fonction  $\ln$  est  $x \mapsto x \ln x - x$  ; on vérifie facilement qu'une primitive de  $x \mapsto \ln(1+x)$  sur  $] -1, +\infty[$  est  $x \mapsto (x+1) \ln(1+x) - (x+1)$ . Par conséquent :

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = [(x+1) \ln(1+x) - (x+1)]_0^1 = \boxed{2 \ln 2 - 1}$$

• Faisons une intégration par parties :

posons  $u(x) = (\ln(1+x))^2$  ;  $u'(x) = 2 \frac{\ln(1+x)}{x+1}$  ;  $v'(x) = 1$  et  $v(x) = x+1$ . On remarque que les deux fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ , l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (\ln(1+x))^2 dx &= [(x+1)(\ln(1+x))^2]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{(x+1) \ln(1+x)}{x+1} dx \\
 &= 2 \ln^2 2 - 2 \int_0^1 \ln(1+x) dx \\
 &= 2 \ln^2 2 - 2(2 \ln 2 - 1) \text{ d'après le point précédent} \\
 &= 2(\ln^2 2 - 2 \ln 2 + 1)
 \end{aligned}$$