ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE–6

L'objet de ce problème est l'étude d'approximations de $x \longmapsto \ln(1+x)$ par des fonctions affines $x \longmapsto ax+b$ sur l'intervalle $I=[0,1]$.

Dans la suite, on considère pour tout réel a la fonction f_a de I dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_a(x) = \ln(1+x) - ax$$

PARTIE A

On se propose dans cette partie de déterminer les réels a et b pour lesquels l'expression suivante est minimale :

$$N_1(a,b) = \int_0^1 (\ln(1+x) - ax - b)^2 dx$$

1)–a) Etant donné deux réels B et C, on demande de déterminer le minimum de l'expression suivante lorsque x décrit $\mathbb{R}$ ainsi que la valeur de la variable x qui réalise ce minimum :

$$x^2 - 2Bx + C$$

b) Etant donné une application continue g de I dans $\mathbb{R}$, en déduire le minimum de l'expression suivante lorsque b décrit $\mathbb{R}$ ainsi que la valeur de b qui réalise ce minimum :

$$\int_0^1 (g(x) - b)^2 dx$$

2) Calculer les trois intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \ln(1+x)dx \ ; \ \int_0^1 (\ln(1+x))^2 dx \ ; \ \int_0^1 x\ln(1+x)dx$$

3) On pose :

$$F_1(a) = \int_0^1 f_a^2(x)dx - \Big(\int_0^1 f_a(x)dx\Big)^2$$

a) Expliciter $F_1(a)$.

b) Déterminer le minimum de F_1 ainsi que la valeur du réel a qui le réalise.

4) Déduire des résultats précédents le minimum K_1 de l'expression $N_1(a,b)$ ainsi que la valeur du couple (a,b) qui le réalise.

PARTIE B

On se propose dans cette partie de déterminer les réels a et b pour lesquels l'expression suivante est minimale :

$$N_2(a,b) = \max_{0\le x\le 1} |\ln(1+x) - ax - b|$$

1) Pour toute application g continue de I dans $\mathbb{R}$, on note :

$$M(g) = \max_{0\le x\le 1} g(x) \ ; \ m(g) = \min_{0\le x\le 1} g(x) \ ; \ \mu(g) = \max_{0\le x\le 1} |g(x)|$$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

En utilisant des réels x_1 et x_2 tels que $g(x_1) = M(g)$ et $g(x_2) = m(g)$ (on en établira l'existence), établir que pour tout nombre réel b, on a

$$\begin{cases} \mu(g-b) = \dfrac{M(g)-m(g)}{2} & \text{si } b = \dfrac{M(g)+m(g)}{2} \\ \mu(g-b) > \dfrac{M(g)-m(g)}{2} & \text{si } b \neq \dfrac{M(g)+m(g)}{2} \end{cases}$$

2)−a) Prouver que la dérivée de la fonction f_a s'annule sur I si et seulement si le réel a appartient à un intervalle $[\alpha, \beta]$ que l'on précisera.

b) En déduire les variations de la fonction f_a en distinguant les trois cas : $a < \alpha$; $\alpha \leq a \leq \beta$ et $a > \beta$.

3) On pose

$$F_2(a) = M(f_a) - m(f_a)$$

Expliciter l'expression de $F_2(a)$ en fonctions des valeurs de a. Etudier la continuité et la dérivabilité de F_2 et tracer sa courbe représentative.

4) Déduire des résultats précédents le minimum K_2 de l'expression $N_2(a, b)$, ainsi que les valeurs de a et b qui le réalisent.

5) Vérifier l'inégalité suivante : $K_1 \leq K_2^2$ (on donne $\ln 2 \cong 0.69$).

Etait-elle prévisible ?

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 5

CORRIGE–6 :

PARTIE A

1– a)

Notons f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2Bx + C$. Cette application est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une application polynomiale) et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2(x - B)$; ce qui permet de dresser le tableau de variations :

x	$-\infty$	B	$+\infty$
$f'x)$	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Il apparaît clairement que f admet au point $x = B$ un minimum et ce minimum vaut $f(B) = B^2 - 2B^2 + C = C - B^2$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (g(x) - b)^2 dx &= \int_0^1 (g^2(x) - 2bg(x) + b^2)dx \\ &= \int_0^1 g^2(x)dx - 2b\int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 b^2 dx \text{ par linéarité de l'intégration} \\ &= \int_0^1 g^2(x)dx - 2b\int_0^1 g(x)dx + b^2 \\ &= b^2 - 2b\int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 g^2(x)dx\end{aligned}$$

On est ramené à la question **a)** dans laquelle $x = b$.

l'expression $\int_0^1 (g(x) - b)^2 dx$ est minimum pour $b = \int_0^1 g(x)dx$ et la valeur du minimum est $\int_0^1 g^2(x)dx - \left(\int_0^1 g(x)dx\right)^2 \geq 0$; cette valeur est ≥ 0 car $\forall b \in \mathbb{R},\ \int_0^1 (g(x) - b)^2 dx \geq 0$ (les bornes sont dans l'ordre croissant)

2)

• Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction ln est $x \longmapsto x\ln x - x$; on vérifie facilement qu'une primitive de $x \longmapsto \ln(1 + x)$ sur $]-1, +\infty[$ est $x \longmapsto (x + 1)\ln(1 + x) - (x + 1)$. Par conséquent :

$$\int_0^1 \ln(1 + x)dx = [(x + 1)\ln(1 + x) - (x + 1)]_0^1 = \boxed{2\ln 2 - 1}$$

• Faisons une intégration par parties :

posons $u(x) = (\ln(1 + x))^2$; $u'(x) = 2\dfrac{\ln(1 + x)}{x + 1}$; $v'(x) = 1$ et $v(x) = x + 1$. On remarque que les deux fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$, l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\ln(1 + x))^2 dx &= [(x + 1)(\ln(1 + x))^2]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{(x + 1)\ln(1 + x)}{x + 1}dx \\ &= 2\ln^2 2 - 2\int_0^1 \ln(1 + x)dx \\ &= 2\ln^2 2 - 2(2\ln 2 - 1) \quad \text{d'après le point précédent} \\ &= 2(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)\end{aligned}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.