



PROBLEMES DE MATHEMATIQUES



ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE-6

L'objet de ce problème est l'étude d'approximations de $x \mapsto \ln(1+x)$ par des fonctions affines $x \mapsto ax+b$ sur l'intervalle $I = [0, 1]$.

Dans la suite, on considère pour tout réel a la fonction f_a de I dans \mathbb{R} définie par :

$$f_a(x) = \ln(1+x) - ax$$

PARTIE A

On se propose dans cette partie de déterminer les réels a et b pour lesquels l'expression suivante est minimale :

$$N_1(a, b) = \int_0^1 (\ln(1+x) - ax - b)^2 dx$$

1)–a) Etant donné deux réels B et C , on demande de déterminer le minimum de l'expression suivante lorsque x décrit \mathbb{R} ainsi que la valeur de la variable x qui réalise ce minimum :

$$x^2 - 2Bx + C$$

b) Etant donné une application continue g de I dans \mathbb{R} , en déduire le minimum de l'expression suivante lorsque b décrit \mathbb{R} ainsi que la valeur de b qui réalise ce minimum :

$$\int_0^1 (g(x) - b)^2 dx$$

2) Calculer les trois intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx ; \int_0^1 (\ln(1+x))^2 dx ; \int_0^1 x \ln(1+x) dx$$

3) On pose :

$$F_1(a) = \int_0^1 f_a^2(x) dx - \left(\int_0^1 f_a(x) dx \right)^2$$

a) Expliciter $F_1(a)$.

b) Déterminer le minimum de F_1 ainsi que la valeur du réel a qui le réalise.

4) Déduire des résultats précédents le minimum K_1 de l'expression $N_1(a, b)$ ainsi que la valeur du couple (a, b) qui le réalise.

PARTIE B

On se propose dans cette partie de déterminer les réels a et b pour lesquels l'expression suivante est minimale :

$$N_2(a, b) = \max_{0 \leq x \leq 1} |\ln(1+x) - ax - b|$$

1) Pour toute application g continue de I dans \mathbb{R} , on note :

$$M(g) = \max_{0 \leq x \leq 1} g(x) ; m(g) = \min_{0 \leq x \leq 1} g(x) ; \mu(g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)|$$

En utilisant des réels x_1 et x_2 tels que $g(x_1) = M(g)$ et $g(x_2) = m(g)$ (on en établira l'existence), établir que pour tout nombre réel b , on a

$$\begin{cases} \mu(g-b) = \frac{M(g) - m(g)}{2} & \text{si } b = \frac{M(g) + m(g)}{2} \\ \mu(g-b) > \frac{M(g) - m(g)}{2} & \text{si } b \neq \frac{M(g) + m(g)}{2} \end{cases}$$

2)–a) Prouver que la dérivée de la fonction f_a s'annule sur I si et seulement si le réel a appartient à un intervalle $[\alpha, \beta]$ que l'on précisera.

b) En déduire les variations de la fonction f_a en distinguant les trois cas : $a < \alpha$; $\alpha \leq a \leq \beta$ et $a > \beta$.

3) On pose

$$F_2(a) = M(f_a) - m(f_a)$$

Expliciter l'expression de $F_2(a)$ en fonctions des valeurs de a . Etudier la continuité et la dérivabilité de F_2 et tracer sa courbe représentative.

4) Déduire des résultats précédents le minimum K_2 de l'expression $N_2(a, b)$, ainsi que les valeurs de a et b qui le réalisent.

5) Vérifier l'inégalité suivante : $K_1 \leq K_2^2$ (on donne $\ln 2 \cong 0.69$).

Etait-elle prévisible ?

CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 5

CORRIGE-6 :

PARTIE A

1- a) _____

Notons f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2Bx + C$. Cette application est dérivable sur \mathbb{R} (c'est une application polynomiale) et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(x - B)$; ce qui permet de dresser le tableau de variations :

| | | | |
|---------|------------|-----|------------|
| x | $-\infty$ | B | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | + | |
| f | \searrow | | \nearrow |

Il apparaît clairement que f admet au point $x = B$ un minimum et ce minimum vaut $f(B) = B^2 - 2B^2 + C = C - B^2$

b) _____

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (g(x) - b)^2 dx &= \int_0^1 (g^2(x) - 2bg(x) + b^2) dx \\
 &= \int_0^1 g^2(x) dx - 2b \int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 b^2 dx \text{ par linéarité de l'intégration} \\
 &= \int_0^1 g^2(x) dx - 2b \int_0^1 g(x) dx + b^2 \\
 &= b^2 - 2b \int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 g^2(x) dx
 \end{aligned}$$

On est ramené à la question a) dans laquelle $x = b$.

l'expression $\int_0^1 (g(x) - b)^2 dx$ est minimum pour $b = \int_0^1 g(x) dx$
 et la valeur du minimum est $\int_0^1 g^2(x) dx - \left(\int_0^1 g(x) dx \right)^2 \geq 0$;
 cette valeur est ≥ 0 car $\forall b \in \mathbb{R}, \int_0^1 (g(x) - b)^2 dx \geq 0$ (les bornes sont dans l'ordre croissant)

2) _____

• Une primitive sur \mathbb{R}_+^* de la fonction \ln est $x \mapsto x \ln x - x$; on vérifie facilement qu'une primitive de $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$ est $x \mapsto (x+1) \ln(1+x) - (x+1)$. Par conséquent :

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = [(x+1) \ln(1+x) - (x+1)]_0^1 = \boxed{2 \ln 2 - 1}$$

• Faisons une intégration par parties :

posons $u(x) = (\ln(1+x))^2$; $u'(x) = 2 \frac{\ln(1+x)}{x+1}$; $v'(x) = 1$ et $v(x) = x+1$. On remarque que les deux fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$, l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (\ln(1+x))^2 dx &= [(x+1)(\ln(1+x))^2]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{(x+1) \ln(1+x)}{x+1} dx \\
 &= 2 \ln^2 2 - 2 \int_0^1 \ln(1+x) dx \\
 &= 2 \ln^2 2 - 2(2 \ln 2 - 1) \text{ d'après le point précédent} \\
 &= 2(\ln^2 2 - 2 \ln 2 + 1)
 \end{aligned}$$