ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE–5

PARTIE I

Pour tout entier $n \geq 0$, on note f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$$

et on note C_n la courbe représentative de C_n dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On fera la convention habituelle $0^0 = 1$ pour que $f_0(0)$ soit défini.

1) Dresser le tableau de variations de f_n pour $n \geq 1$.

2) Pour tout entier $n \geq 2$, étudier la position de la courbe C_n par rapport à C_{n-1} et vérifier que la point A_n de coordonnées $(n, f_n(n))$ appartient à C_{n-1}.

3) Construire C_1, C_2 et C_3 dans un même repère ; on placera les tangentes en O à ces trois courbes.

PARTIE II

On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = f_n(n)$

1) Etudier les variations de la suite (u_n). La suite (u_n) est-elle convergente ?

2) a) Montrer que $\forall t \in [0, 1],\ \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{1 - \frac{1}{4n}}$

3) a) Montrer que $\forall n > 0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{4n}}$

b) Montrer que $\forall n \geq 2,\ u_n \leq \mathrm{e}^{-1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right)}$

4) Montrer que $\forall n \geq 2,\ \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$; en déduire une majoration de u_n puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

PARTIE III

Pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout réel $a \geq 0$, on pose $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{t^n \mathrm{e}^{-t}}{n!} dt$.

1) Calculer $I_0(a)$ et $I_1(a)$.

2) Montrer que $\forall t \geq 0$ et $n > 0$, on a $0 \leq f_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}$. En déduire un encadrement de $I_n(a)$.

3) a) Montrer que $\forall n > 0,\ \frac{1}{n!} < \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n$

b) En déduire une nouvelle majoration de $I_n(a)$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(a)$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

4) Etablir une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ pour $n \geq 1$ et en déduire

$$\forall n \geq 2,\ I_n(a) = 1 - \mathrm{e}^{-a} \times (1 + \frac{a}{1!} + \cdots + \frac{a^n}{n!})$$

5) En déduire que la série de terme général $\frac{a^n}{n!}$ est convergente et en donner sa somme.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.