ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE–4

On désigne par $[x]$ la partie entière du réel x, c'est-à-dire que l'on a $[x] \in \mathbb{Z}$ et $[x] \leq x < [x]+1$

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} [x]\ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

PARTIE A

1) Déterminer l'ensemble, noté D de définition de f ; sans chercher à dériver, montrer que f est croissante sur D. Sur quel sous-ensemble de D est-elle strictement croissante ?

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D

3) Donner la représentation graphique de f .

PARTIE B

1) Montrer que $\forall a > 0$, f est intégrable sur $[0, a]$.

2) Montrer que pour tout entier naturel k non nul

$$\int_k^{k+1} f(x)dx = k(k+1)\ln(k+1) - k^2 \ln k - k$$

3) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$\int_1^n f(x)dx = -\sum_{k=1}^{n} \ln k + n^2 \ln n - \frac{n(n-1)}{2}$$

4) Pour $n \geq 1$,, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k \ln k \leq \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \ln n$$

5) a) Montrer que pour $n \geq 1$, $\int_1^n f(x)dx \leq \int_1^n x \ln x dx$ et en déduire

$$\frac{n^2}{2}\ln n - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \leq \sum_{k=1}^{n} k \ln k$$

b) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k \ln k \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{n^2}{2} \ln n$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 4

CORRIGE–4 :

PARTIE A

1)

La fonction logarithme est définie sur $]0,+\infty[$ et $f(0)=0$, donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+$

Remarquons que $\forall x \in]0,1[,\ [x]=0$, donc sur $]0,1[,\ f(x)=0$; f est constante sur $[0,1]$ puisque $f(0)=0$ par définition et $f(1)=[1]\times\ln 1=0$: f est croissante au sens large sur $[0,1]$

Remarquons que la fonction partie entière est croissante au sens large sur $\mathbb{R}_+$.

C'est une fonction en escalier, constante sur les intervalles $[n,n+1[$ où $n\in\mathbb{N}$ sur lesquels elle vaut n. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$; si x et y sont dans un même intervalle du type $[n,n+1[$, alors $[x]=[y]=n$; si x et y ne sont pas dans le même intervalle du type $[n,n+1[$, alors il existe deux entiers distincts p et q (avec par exemple $p<q$) tels que $p\leq x<p+1$ et $q\leq y<q+1$. On a $[x]=p<q=[y]$.

Finalement $\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ w<y\Longrightarrow [x]\leq[y]$.

Sur $[1,+\infty[$, la fonction ln est strictement croissante et positive, la fonction partie entière est croissante et positive, donc f est le produit de deux fontions croissantes, positives, donc f est croissante

Finalement, la fonction f est constante sur $[0,1]$, croissante sur $[1,+\infty[$, donc f est croissante sur $[0,+\infty[$

Sur l'intervalle $[1,+\infty[$, f est le produit d'une fonction croissante au sens large (la partie entière) et positive et d'une fonction strictement croissante (le logarithme) et positive, donc f est strictement croissante.

En effet, soit $0\leq x<y$, alors $1\leq[x]\leq[y]$ et $0\leq\ln x<\ln y$. Faisons le produit de ces deux encadrements de nombres positifs ou nuls, il vient $0\leq f(x)<f(y)$ (si $[x]<[y]$ c'est évident et si $[x]=[y]$ c'est $\ln x<\ln y$ qui donne le résultat)

f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

2)

- Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall x\in]n,n+1[,\ f(x)=n\ln x$, donc f est continue. f est donc continue sur $\bigcup_{n=0}^{+\infty}]n,n+1[$
- Continuité en 0^+

Sur $]0,1[,\ f(x)=0$ et $f(0)=0$, donc f est continue en 0 à droite.

- continuité en $n\in\mathbb{N}^*$

$f(n)=[n]\times\ln n=n\ln n$.

Sur $]n-1,n[,\ f(x)=(n-1)\ln x$, donc $\lim\limits_{x\to(n-1)^-} f(x)=(n-1)\ln n$.

Sur $]n,n+1[,\ f(x)=n\ln x$, donc $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=n\ln n$

Si $n=1$, les deux limites sont égales à $0=f(x)$, donc f est continue en 1.

Si $n\geq 2,\ (n-1)\ln n\neq n\ln n$, donc f est discontinue en n.

On peut remarquer que $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)=f(n)$, donc f est continue en n à droite et discontinue à gauche.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.