ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE–2

On considère, pour $n \geq 1$, la fonction polynomiale P_n définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ P_n(x) = x^n + x - 1$$

1) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution positive que l'on notera x_n et vérifier que $x_n \in]0, 1[$.

2) Montrer que la suite (x_n) est croissante et justifier l'existence d'une limite ℓ pour la suite (x_n) telle que $\ell \in]0, 1[$.

3) En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

4) On pose $u_n = 1 - x_n$. Montrer que $\ln(1-u_n) = \dfrac{1}{n}\ln(u_n)$ et conclure que $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} -\dfrac{\ln(u_n)}{n}$

5) a) Soit deux suites numériques (a_n) et (b_n)strictement positives : on suppose $a_n \underset{(+\infty)}{\sim} b_n$ et a_n tend vers une limite positive ou nulle non égale à 1 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que $\ln a_n \underset{(+\infty)}{\sim} \ln b_n$

b) Montrer que $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \left(\dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{\ln(-\ln u_n)}{n}\right)$