



PROBLEMES DE MATHEMATIQUES



ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE-1

PARTIE I

- 1) Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}$. Calculer, en fonction de $f(x)$, l'expression $\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+2x)}{2\sqrt{x}}$.
- 2) Montrer que : $\forall x \geq 1, 0 \leq f(x) - 1 \leq \frac{x-1}{2}$.

PARTIE II

- 1) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
- 2) Etudier la position de la courbe C de f par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$) et construire la courbe C .
- 3) Montrer que : $\forall x \geq 1, f(x) \geq 1$.

PARTIE III

Soit maintenant la suite (u_n) définie par $u_0 = x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Montrer que cette suite est minorée.
- 2) Etudier les variations de cette suite.
- 3) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

PARTIE IV

On pose pour $n \geq 1, v_n = u_n - 1$ et on suppose que $x \neq 1$.

- 1) Montrer que : $\forall n \geq 1, v_{n+1} \leq \frac{v_n}{2}$ et en déduire que (v_n) est majorée par une suite géométrique.
- 2) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.
- 3) On pose $w_n = \ln u_n$.
 - a) Montrer que la série $\sum w_n$ est convergente.
 - b) En déduire que la suite (P_n) définie pour $n \geq 1$ par $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$ est convergente.