ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE–1

PARTIE I

1) Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}$. Calculer, en fonction de $f(x)$, l'expression $\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+2x)}{2\sqrt{x}}$.

2) Montrer que : $\forall x \geq 1$, $0 \leq f(x) - 1 \leq \dfrac{x-1}{2}$.

PARTIE II

1) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

2) Etudier la position de la courbe C de f par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$) et construire la courbe C.

3) Montrer que : $\forall x \geq 1,\ f(x) \geq 1$.

PARTIE III

Soit maintenant la suite (u_n) définie par $u_0 = x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que cette suite est minorée.

2) Etudier les variations de cette suite.

3) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

PARTIE IV

On pose pour $n \geq 1$, $v_n = u_n - 1$ et on suppose que $x \neq 1$.

1) Montrer que : $\forall n \geq 1,\ v_{n+1} \leq \frac{v_n}{2}$ et en déduire que (v_n) est majorée par une suite géométrique.

2) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

3) On pose $w_n = \ln u_n$.

a) Montrer que la série $\sum w_n$ est convergente.

b) En déduire que la suite (P_n) définie pour $n \geq 1$ par $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$ est convergente.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE