ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE–1

PARTIE I

1) Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}$. Calculer, en fonction de $f(x)$, l'expression $\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+2x)}{2\sqrt{x}}$.

2) Montrer que : $\forall x \geq 1$, $0 \leq f(x) - 1 \leq \dfrac{x-1}{2}$.

PARTIE II

1) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

2) Etudier la position de la courbe C de f par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$) et construire la courbe C.

3) Montrer que : $\forall x \geq 1,\ f(x) \geq 1$.

PARTIE III

Soit maintenant la suite (u_n) définie par $u_0 = x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que cette suite est minorée.

2) Etudier les variations de cette suite.

3) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

PARTIE IV

On pose pour $n \geq 1$, $v_n = u_n - 1$ et on suppose que $x \neq 1$.

1) Montrer que : $\forall n \geq 1,\ v_{n+1} \leq \dfrac{v_n}{2}$ et en déduire que (v_n) est majorée par une suite géométrique.

2) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

3) On pose $w_n = \ln u_n$.

a) Montrer que la série $\sum w_n$ est convergente.

b) En déduire que la suite (P_n) définie pour $n \geq 1$ par $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$ est convergente.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.