ESSEC

M B A

CONCOURS D'ADMISSION

Option économique

MATHEMATIQUES III

Année 1998

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. Celui-ci est rapporté dans toute la suite à sa base canonique $(e_0,\ e_1,\ \ldots,\ e_n)$ définie par

$$e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x,\ \ldots,\ e_n(x) = x^n.$$

1. Etude d'un endomorphisme de l'espace vectoriel P_n
   On désigne par a un nombre entier fixé ($a \in \mathbb{Z}$), et l'on définit, pour toute fonction polynôme P appartenant à P_n la fonction T_aP
   $$T_aP(x) = P(x+a)$$
   (a) Prouver que T_aP est un élément de $\mathcal{P}_n$, et prouver la linéarité de l'application T_a associant à toute fonction P appartenant à $\mathcal{P}_n$ la fonction T_aP appartenant à $\mathcal{P}_n$.
   (b) Déterminer la matrice M_a de l'endomorphisme T_a dans la base canonique de $\mathcal{P}_n$ et prouver l'inversibilité de M_a et de T_a.
   (c) Déterminer, pour $a \neq 0$, la (ou les) valeur(s) propre(s) λ de T_a et les fonctions polynômes P associées (qui vérifient donc $T_aP(x) = \lambda P(x)$ pour tout nombre réel x).

2. Composition des endomorphismes $T_a \quad a \in \mathbb{Z}$
   (a) Etant donnés des nombres entiers $a,\ b$, déterminer les endomorphismes composés $T_a \circ T_b$ et $T_b \circ T_a$, et en déduire que $(T_a)^{-1} = T_{-a}$.

(b) Expliciter ainsi le carré et l'inverse de la matrice M_1.
Ecrire en particulier la matrice M_1 et son inverse dans le cas $n = 4$.

3. Application à un problème de dénombrement
Etant donnés deux nombres entiers naturels n et p, on désigne par $s(p,n)$ le nombre des surjections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

(On remarquera que $s(p,0) = 0$ et $s(0,n) = 0$ et l'on posera $s(0,0) = 1$)

(a) Déterminer en fonction de p l'expression de $s(p,1)$ et $s(p,2)$.

(b) Déterminer en fonction de p l'expression de $s(p,p)$ et de $s(p,n)$ lorsque $n > p$.

(c) Combien y-a-t-il d'appications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments ?

(d) Exprimer à l'aide de n, p et k et $s(p,k)$ le nombre des applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments dont le cardinal de l'image est égal à k (et donc $0 \leqslant k \leqslant n$).

(e) Prouver enfin la formule suivante :

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} C_n^k s(p,k)$$

En déduire l'expression de la matrice ligne $(s(p,0),\ s(p,1),\ \ldots,\ s(p,n)).M_1$, puis donner l'expression de $s(p,n)$ en fonction de p et de n.

Applications:
i) Etant donnés deux ensembles E_p et E_n de cardinaux p et n, déterminer à l'aide de n et p les nombres respectifs des applications injectives, surjectives, bijectives de E_p et E_n.
ii) Déterminer la valeur de l'expression suivante pour tout nombre entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} k^n$$

4. Valeur des nombres $s(p,n)$ pour $p \leqslant n+2$
On pose pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel x:

$$f_n(x) = (e^x - 1)^n$$

(a) Exprimer $f_n(x)$ sous forme de somme en utilisant la formule du binôme de Newton.

(b) Déterminer $f_n^{(p)}(0)$ et montrer que $f_n^{(p)}(0) = s(p,n)$ pour tout entier $p \geqslant 0$.

(c) Ecrire le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto e^x - 1$ en 0 et en déduire l'expression en fonction de n des trois nombres réels $a_n,\ b_n,\ c_n$ tels que :

$$f_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n+1} + c_n x^{n+2} + x^{n+2}\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

(d) A l'aide de la formule de Taylor-Young écrite à l'ordre $n+2$ en 0, donner alors la valeur des nombres $s(p,n)$ pour $0 \leqslant p \leqslant n+2$.

Exercice 2

On compare dans cette exercice les intérÍts rapportés par une somme donnée placée de différentes façons possibles.

1. **Une question technique.**
Dans toute cette question, on désigne par x un nombre réel positif donné.

(a) On considère la fonction définie pour tout nombre réel $t > 0$ par:

$$f(t) = t \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right)$$

Calculer $f'(t)$ et $f"(t)$. Quel est le signe de $f"(t)$? En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

(b) On considère la suite définie pour tout nombre entier $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Déduire de l'étude de f le sens de variation des suites $(\ln(u_n))$ et (u_n)
Calculer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

2. **Taux d'intérÍt annuel et taux d'intérÍt sur une fraction de l'année.**
On considère une somme S_0 que l'on place de différentes façons.

(a) On place S_0 durant une année au taux d'intérÍt annuel $r > 0$.
De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement?

(b) On subdivise l'année en n périodes de durées égales, et l'on place S_0 durant une année à un taux d'intérÍt égal à r/n pour chacune des périodes.
De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?
Déterminer la limite de celle-ci lorsque n tend vers $+\infty$.
Comparer ces deux placements des questions a: et b: et conclure.

(c) On subdivise l'année en n périodes de durées égales, et l'on place S_0 durant une année à un taux d'intérÍt égal à r_n pour chacune des périodes (où r_n est donc indépendant de la période considérée).
De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?
Exprimer r_n en fonction de de r et de n pour que le placement d'une somme rapporte les mÍmes intérÍts que celle-ci soit placée à l'année au taux d'intérÍt annuel r ou à l'année divisée en n périodes au taux d'intérÍt par période r_n.

A titre d'exemple, si $r = 12\%$, le taux mensuel est égal à $0,95\%$.

3. **Taux d'intérÍt annuel et taux d'intérÍt instantané constant**
On considère une somme S_0 que l'on place au taux d'intérÍt instantané $i > 0$, ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant $t \geqslant 0$ de la somme $S(t)$ (avec donc $S(0) = S_0$), alors on dispose à l'instant $t + h \geqslant 0$ de la somme $S(t + h)$ où :

$$S(t + h) = S(t)[1 + ih + h\varepsilon(h)]$$

où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

(a) Prouver que S est dérivable en t et exprimer $S'(t)$ en fonction de $S(t)$ et i.

(b) Etudier la fonction $t \longmapsto \exp(-it)S(t)$, puis en déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S_0, t et i.

(c) Quelle est la somme $S(1)$ obtenue à l'issue d'une année de placement ?
Exprimer i en fonction de r pour que le placement d'une somme rapporte les mÍmes intérÍts, que celle-ci soit placée à l'année au taux d'intérÍt annuel r ou au taux d'intérÍt instantané i.

A titre d'exemple, si $r = 12\%$, le taux instantané est égal à $11,33\%$.

4. **Placements avec taux d'intérÍt instantané variable**
On considère une somme S_0 que l'on place au taux d'intérÍt instantané $i(t) \geqslant 0$, ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant $t \geqslant 0$ de la somme $S(t)$ (avec donc $S(0) = S_0$), alors on dispose à l'instant $t + h \geqslant 0$ de la somme $S(t + h)$ où:

$$S(t + h) = S(t)[1 + i(t)h + h\varepsilon(h)]$$

où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.
On suppose que la fonction $t \longmapsto i(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et l'on note I sa primitive s'annulant en 0.

(a) Prouver que S est dérivable et exprimer $S'(t)$ en fonction de $S(t)$ et de $i(t)$.

(b) Etudier la fonction $t \longleftarrow \exp(-I(t))S(t)$, puis en déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S_0 et $I(t)$.

(c) En déduire la somme $S(n)$ obtenue à l'issue de n années de placement dans les 4 cas suivants (i et a sont des nombres réels positifs donnés):

  i. $i(t) = i$ (taux constant)

  ii. $i(t) = i(1 + a \sin t)$ (fluctuation autour d'un taux constant i)

  iii. $i(t) = i(1 + ae^{-t})$ (taux tendant asymptotiquement vers i sans osciller)

  iv. $i(t) = i(1 + a \sin t\ e^{-t})$ (taux tendant asymptotiquement vers i en oscillant)

- (On donnera à chaque fois l'allure de la courbe représentative de la fonction i sur $\mathbb{R}^+$, ainsi que l'expression de la primitive I).

ANNALES DE MATHEMATIQUES 1998

ESSEC : MATH III

CORRIGE

EXERCICE–I

QUESTION–1

1–a)

Posons $P(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kx^k,\ (x\in\mathbb{R})$.

- Alors $(T_aP)(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k(x+a)^k$.

$(x+a)^k$ est un polynôme de degré k : il vaut $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^ia^{k-i}$; le terme en x^k est $\displaystyle\binom{k}{k}x^k=x^k$.

$(T_aP)(x)$ est donc la somme de polynômes de degré inférieur ou égal à n

$$\boxed{\forall P\in P_n,\ T_a(P)\in P_n.}$$

- Linéarité :

Soit $(P,Q)\in(P_n)^2$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ (T_a(P+\alpha Q))(x)&=(P+\alpha Q)(x+a)\\&=P(x+a)+\alpha Q(x+a)=(T_aP)(x)+\alpha(T_aQ)(x)\\&=\Big(T_a(P)+\alpha T_a(Q)\Big)(x).\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } T_a(P+\alpha Q)=T_a(P)+\alpha T_a(Q).\ \text{Donc } T_a\in\mathcal{L}(P_n).}$$

1–b)

$$\begin{aligned}\forall k\in[\![0,n]\!],\ \forall x\in\mathbb{R},\ (T_a(e_k))(x)&=(x+a)^k\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^ia^{k-i}\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}e_i(x)\quad\text{donc}\\T_a(e_k)&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}e_i.\end{aligned}$$

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

La $(k+1)$ ème colonne de $M-a$(celle des coordonnées de $T_a(e_k)$) est :

$$\begin{pmatrix} \binom{k}{0}a^k \\ \binom{k-1}{0}a^{k-1} \\ \vdots \\ \binom{k}{k}a^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{k}{0}a^k \\ \binom{k-1}{0}a^{k-1} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice M_a de T_a dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & \binom{1}{0}a^1 & \binom{2}{0}a^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{n}{0}a^n \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}a^1 & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{n}{1}a^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \binom{n}{2}a^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1}a^1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont non nuls : M_a est inversible ; T_a est un automorphisme de P_n.

1–c) ___

La matrice est triangulaire, les valeurs propres sont les termes diagonaux :

$$\boxed{M_a \text{ admet une unique valeur propre } \lambda = 1.}$$

<u>Recherche du sous-espace propre</u> :

$T_a - \mathrm{Id}$ a pour matrice dans la base canonique de P_n la matrice $M_a - I_n$.

$$M_a - I_n = \begin{pmatrix} 0 & \binom{1}{0}a^1 & \binom{2}{0}a^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{n}{0}a^n \\ 0 & 0 & \binom{2}{1}a^1 & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{n}{1}a^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \binom{n}{2}a^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1}a^1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque : La première colonne est nulle, donc $(T_a - \mathrm{Id})(e_0) = 0$: e_0 est vecteur propre associé à $\lambda = 1$.

Les colonnes numéros $2, 3, \ldots, n+1$ représentent les coordonnées dans la base canonique des images par $T_a - \mathrm{Id}$ des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

La matrice de ces colonnes est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n+1,n}(\mathbb{R})$; elle est échelonnée.

De plus, $\binom{1}{0}a^1 \neq 0$, $\binom{2}{1}a^1 \neq 0, \ldots, \binom{n}{n-1}a^1 \neq 0$ puisque $a \neq 0$.

Ceci prouve que les vecteurs $(T_a - \mathrm{Id})(e_1), (T_a - \mathrm{Id})(e_2) \dots, (T_a - \mathrm{Id})(e_n)$ constituent une famille libre. Comme ils constituent (**c'est un résultat général**) une famille génératrice de $\mathrm{Im}(T_a)$, on conclut : $\boxed{\dim \mathrm{Im}(T_a) = n}$

Le théorème du rang donne alors $\dim \mathrm{Ker}(T_a - \mathrm{Id}) = n + 1 - n = 1$.

> Le vecteur $e_0 \neq 0$ est dans le noyau : il en constitue donc une base. Le sous-espace propre de T_a associé à la valeur propre 1, qui n'est autre que $\mathrm{Ker}(T_a - \mathrm{Id})$ est donc égal à $\mathrm{vect}(e_0)$.

QUESTION–2

2–a)

$$\begin{aligned}
\forall P \in P_n,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \Big((T_a \circ T_b)(P)\Big)(x) &= \Big(T_a(T_b P)\Big)(x)\\
&= \Big(T_a(P)\Big)(x+b) = P(x+b+a)\\
&= \Big(T_{b+a}P\Big)(x).\\
&\text{de même}\\
\Big((T_b \circ T_a)P\Big)(x) &= P(x+a+b) = T_{a+b}P(x).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ T_a \circ T_b = T_{b+a} = T_{a+b} = T_b \circ T_a.}$$

Si $b = -a$, $T_a \circ T_{-a} = T_0$. Or $T_0 = \mathrm{Id}$ (il suffit de regarder la matrice M_0).

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ (T_a)^{-1} = T_{-a}.}$$

2–b)

M_1^2 est la matrice de $T_1 \circ T_1$: donc $\boxed{M_1^2 = M_2.}$

En utilisant les résultats de la question 1 b), on obtient :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

QUESTION–3

3–a)

L'ensemble d'arrivée n'ayant qu'un seul élément, il n'y a qu'une seule application de l'ensemble E de cardinal p dans l'ensemble F de cardinal 1.

$$\boxed{s(p,1) = 1.}$$

Soit $p \geq 2$. Le nombre d'applications de E vers F vaut 2^p (c'est un résultat du cours). Parmi ces applications il y en a deux qui ont pour ensemble image un seul des deux éléments de F (ce sont les deux applications constantes). Les autres ont pour image F : ce sont les applications surjectives de E dans F. Donc

$$\boxed{s(p,2) = 2^p - 2.}$$