



EXERCICE I

1. a) Soit  $\mu$  un paramètre réel. On considère le système d'équations

$$(1) \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \end{cases}$$

d'inconnues  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

i. Montrer que ce système admet les mêmes solutions que le système

$$(2) \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \\ (3 - \mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 & = 0 \end{cases}$$

ii. Résoudre, en discutant suivant les valeurs de  $\mu$ , le système

$$\begin{cases} (3 - \mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 & = 0 \end{cases}$$

iii. Déterminer enfin, suivant les valeurs de  $\mu$ , les solutions du système (1).

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour tout entier  $n \geq 1$  on note  $\mathbb{R}_n[x]$  l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  et, à toute fonction polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[x]$ , on associe la fonction polynôme  $T_n P$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$T_n P(x) = (nx + 1)P(x) + (1 - x^2)P'(x).$$

- Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ , l'application  $P \mapsto T_n P$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[x]$ .
- Donner la matrice  $M_n$  de cet endomorphisme  $T_n$  dans la base de  $\mathbb{R}_n[x]$  formée des fonctions polynômes  $1, X, \dots, X^n$  où  $X^k$  désigne, pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , la fonction  $x \mapsto x^k$ .
- Dans le cas  $n = 3$ , donner les valeurs propres de  $T_3$  et écrire les fonctions polynômes formant une base de vecteurs propres.
- En faisant la somme des lignes de la matrice  $M_n$ , déterminer simplement une valeur propre de  $T_n$ .

3. On se propose de déterminer plus généralement toutes les valeurs propres de  $T_n$ .

a) Etant donné un réel  $\lambda$  calculer, pour  $-1 < x < 1$ , l'intégrale

$$g_\lambda(x) = \int_0^x \frac{nt + 1 - \lambda}{1 - t^2} dt.$$

On cherchera d'abord deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\frac{nt + 1 - \lambda}{1 - t^2} = \frac{a}{1 - t} + \frac{b}{1 + t}$ .

- b) Montrer que si les nombres  $h = n + 1 - \lambda$  et  $k = n - 1 + \lambda$  sont des nombres entiers, positifs ou nuls, pairs, alors la fonction  $\exp(-g_\lambda(x))$  est une fonction polynôme. Vérifier que ces conditions impliquent que  $-(n - 1) \leq \lambda \leq n + 1$ .
- c) Pour  $n = 3$  quels sont les réels  $\lambda$  qui vérifient les conditions précédentes? Pour un entier  $n \geq 1$  quelconque, combien de réels  $\lambda$  vérifient ces conditions?
- d) Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $T_n$  et si  $P_\lambda$  est un vecteur propre associé, alors la fonction  $h$ , définie sur  $] - 1, 1[$  par  $h(x) = P_\lambda(x) \exp(g_\lambda(x))$ , a une dérivée nulle. Que vaut alors  $P_\lambda$ ?
- e) Déterminer les valeurs propres de  $T_n$  et une base de vecteurs propres (on pourra distinguer les cas  $n$  pair et  $n$  impair).

## EXERCICE II

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et que, à chaque lancer, la pièce donne face avec la probabilité  $p$  ( $0 < p < 1$ ) et pile avec la probabilité  $q = 1 - p$ .

L'objet de l'exercice est l'étude du nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux faces de suite, c'est à dire lors de deux lancers consécutifs.

On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité  $P$ , modélisant cette expérience.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note

- $U_n$  l'événement : on obtient 2 faces de suite, pour la première fois, aux lancers numéro  $n$  et  $n + 1$ ,

et on pose  $u_n = P(U_n)$ .

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on note

- $A_n$  l'événement : les  $n$  premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le  $n$ -ième lancer donne face,
- $B_n$  l'événement : les  $n$  premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le  $n$ -ième lancer donne pile,

et on pose  $x_n = P(A_n)$ ,  $y_n = P(B_n)$ .

1. a) Déterminer  $u_1$  ;  $x_2, y_2, u_2$  ;  $x_3, y_3, u_3$ .  
b) Trouver, pour  $n \geq 2$ , une relation simple entre  $x_n$  et  $u_n$ .

c) Pour tout  $n \geq 2$  déterminer les probabilités conditionnelles

$$P(A_{n+1} / A_n), \quad P(A_{n+1} / B_n), \quad P(B_{n+1} / A_n), \quad P(B_{n+1} / B_n).$$

d) En déduire, pour tout  $n \geq 2$ , les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= p y_n \\ y_{n+1} &= q (x_n + y_n) \end{cases}$$

2. On suppose, dans cette question, que  $p = q = \frac{1}{2}$ .

a) Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  la suite de nombres entiers définie par les conditions :

$$f_0 = 1, f_1 = 1 \text{ et, pour tout entier } n \geq 0, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Montrer que, pour tout  $n \geq 2$ , on a  $2^n y_n = f_n$ .

b) On pose  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  et  $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ . Montrer que l'on a, pour tout entier  $n \geq 0$ ,

$$f_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

c) En déduire, pour tout entier  $n \geq 2$ , une expression de  $x_n$ , puis de  $u_n$ , en fonction de  $n, \alpha$  et  $\beta$ .

d) Vérifier que  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$ , c'est à dire que la probabilité d'obtenir deux faces de suite au bout d'un nombre fini de lancers est égale à 1.

3. On considère maintenant le cas où  $p = \frac{2}{3}$ . Donner, pour tout entier  $n \geq 1$ , une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .



## ANNALES DE MATHÉMATIQUES 1998

## HEC : MATH III

## CORRIGE

## EXERCICE-I

## QUESTION-1

1-a) i)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 & = 0 & L_2 \leftarrow L_4 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 & L_3 \leftarrow L_2 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 & L_4 \leftarrow L_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - \mu L_1 - 2L_2 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \\ (3 - \mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 - \mu L_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \left. \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \end{cases} \right\} (S_0) \\ & \left. \begin{cases} (3 - \mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 & = 0. \end{cases} \right\} (S_1) \end{aligned}$$

ii) Résolution du sous-système (S<sub>1</sub>).

Si  $\mu = 0$ , le système proposé équivaut à  $\begin{cases} 3x_1 & = 0 \\ 3x_4 & = 0 \end{cases}$  i.e  $x_1 = x_4 = 0$ .

Si  $\mu \neq 0$ , on effectue  $L_3 \leftarrow 2\mu L_3 + (3 - \mu^2)L_4$ ; le système proposé équivaut alors à

$$\begin{cases} (-4\mu^2 + (3 - \mu^2)^2)x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 & = 0 \end{cases} \quad \text{i.e} \quad \begin{cases} (3 - \mu^2 + 2\mu)(3 - \mu^2 - 2\mu)x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 & = 0 \end{cases}$$

Dans la première équation, le coefficient de  $x_4$  est  $(\mu + 1)(\mu - 3)(\mu - 1)(\mu + 3)$ . Donc

- $\mu \notin \{-3, -1, 1, 3\} \implies x_4 = 0$ , donc  $x_1 = 0$  car  $\mu \neq 0$ .
- $\mu \in \{-3, -1, 1, 3\}$ . Alors la première équation de (S<sub>1</sub>) est satisfaite, il ne reste que la seconde, qui donne  $x_1 = \frac{3 - \mu^2}{2\mu} x_4$ , avec  $x_4 \in \mathbb{R}$ .

iii) Résolution du système

- $\mu \notin \{-3, -1, 1, 3\}$ , deux cas se présentent ;
- 1.  $\mu = 0$ , alors  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$  sans difficultés.
- 2.  $\mu \neq 0$ , alors

le système ( $\mathbf{S}_1$ ) donne  $x_1 = x_4 = 0$  (on vient de le voir).

Le système ( $\mathbf{S}_0$ ) donne alors  $\mu x_2 = \mu x_3 = 0$ , soit  $x_2 = x_3 = 0$  car  $\mu \neq 0$ .

**Conclusion : on a dans ce cas**  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ .

- $\mu \in \{-3, -1, 1, 3\}$ ,

le système  $\mathbf{S}_1$  donne  $x_1 = \frac{3-\mu^2}{2\mu}x_4$ , avec  $x_4 \in \mathbb{R}$  d'après ii).

Le système  $\mathbf{S}_0$  donne alors

$$x_2 = -\mu x_1 = \frac{\mu^2 - 3}{2}x_4 \text{ et } x_3 = -\mu x_4.$$

Donc  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{x_4 \left( \frac{3-\mu^2}{2\mu}, \frac{\mu^2-3}{2}, -\mu, 1 \right) / x_4 \in \mathbb{R}\}$ .

**En résumé :**

- $\mu \notin \{-3, -1, 1, 3\}$ , le système est de Cramer ; il n'admet que la solution triviale  $(0, 0, 0, 0)$ .
- $\mu \in \{-3, -1, 1, 3\}$ , l'ensemble  $\mathcal{S}'$  des solutions du système est :

$$\mathcal{S}' = \{x_4 \left( \frac{3-\mu^2}{2\mu}, \frac{\mu^2-3}{2}, -\mu, 1 \right) / x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

1-b)

La matrice du système précédent est  $S = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 \\ 3 & \mu & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \mu & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \mu \end{pmatrix}$ .

La matrice  $A$  correspond à  $\mu = 1$ .

$\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si la matrice  $A - \lambda I$  n'est pas inversible.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}. \text{ Elle correspond à } \mu = 1 - \lambda.$$

$A - \lambda I$  non inversible  $\iff$  Le système n'est pas de Cramer

$$\iff 1 - \lambda \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

$$\iff \begin{cases} 1 - \lambda = -3 & \text{ou} \\ 1 - \lambda = -1 & \text{ou} \\ 1 - \lambda = 1 & \text{ou} \\ 1 - \lambda = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 4 & \text{ou} \\ \lambda = 2 & \text{ou} \\ \lambda = 0 & \text{ou} \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

Détermination des sous-espaces propres.

Notons  $E_\lambda(A)$  le sous-espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$

- $E_4(A)$  correspond à  $\mu = -3$ . Donc

$$E_4(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \text{ posons } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $E_2(A)$  correspond à  $\mu = -1$ . Donc

$$E_2(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \text{ posons } V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $E_0(A)$  correspond à  $\mu = 1$ . Donc

$$E_0(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ; \text{ posons } V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $E_{-2}(A)$  correspond à  $\mu = 3$ . Donc

$$E_{-2}(A) = \text{vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) ; \text{ posons } V_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Conclusion :** La matrice  $A$  admet quatre valeurs propres distinctes, elle appartient à  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  : elle est diagonalisable.

On conclut que la famille  $(V_1, V_2, V_3, V_4)$  constitue une base de  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ .

## QUESTION-2

---

2-a)

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

$(nx+1)P(x)$  est de degré  $\leq n+1$ ,  $(1-x^2)P'(x)$  aussi, donc  $T_n(P)$  également. Le terme en  $x^{n+1}$  de  $T_n P(x)$  est  $n x a_n x^n - n a_n x^{n+1} = 0$ .

**Conclusion :**  $T_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} ;$$

$$\begin{aligned} T_n(P + \lambda Q)(x) &= (nx+1)(P + \lambda Q)(x) + (1-x^2)(P + \lambda Q)'(x) \\ &= (nx+1)(P(x) + \lambda Q(x)) + (1-x^2)(P'(x) + \lambda Q'(x)) \\ &= (nx+1)P(x) + \lambda(nx+1)Q(x) + \\ &\quad (1-x^2)P'(x) + \lambda(1-x^2)Q'(x) \\ &= (nx+1)P(x) + (1-x^2)P'(x) + \\ &\quad \lambda \left( (nx+1)Q(x) + (1-x^2)Q'(x) \right) \\ &= T_n(P)(x) + \lambda T_n(Q)(x) \\ T_n(P + \lambda Q)(x) &= (T_n(P) + \lambda T_n(Q))(x). \end{aligned}$$

Donc  $T_n(P + \lambda Q) = T_n(P) + \lambda T_n(Q)$ .

$T_n$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2-b)

---

Notons  $P_k$  le polynôme  $x \mapsto x^k$ .

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, \\ T_n(P_k)(x) &= (nx+1)x^k + (1-x^2)kx^{k-1} \\ &= (n-k)x^{k+1} + x^k + kx^{k-1} \\ &= kx^{k-1} + x^k + (n-k)x^{k+1} \\ T_n(P_k)(x) &= kP_{k-1}(x) + P_k(x) + (n-k)P_{k+1}(x) \\ T_n(P_0)(x) &= nx+1 \\ T_n(P_n)(x) &= x^n + nx^{n-1}. \end{aligned}$$

page 3

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.