ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1998

Option économique

Mathématiques II

Lundi 27 avril 1998 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On considère dans ce problème un guichet auquel se présentent aléatoirement des clients. L'objectif est d'étudier la file d'attente se formant à ce guichet au cours du temps, ce qui est traité dans la partie II. Dans la partie I, on étudie une suite récurrente utilisée ultérieurement.

Partie I

On considère un nombre réel strictement positif a et la fonction f définie pour tout nombre réel x par:

$$f(x) = exp[a(x-1)].$$

On définit alors une suite (u_k) par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation :

$$u_{k+1} = f(u_k).$$

1. Convergence de la suite (u_k).

   a) Établir par récurrence pour tout nombre entier naturel k les inégalités:

   $$0 \leq u_k \leq 1 \quad \text{et} \quad u_k \leq u_{k+1}.$$

   b) En déduire la convergence de la suite (u_k), dont on notera $L(a)$ la limite.

2. Limite de la suite (u_k) lorsque $a < 1$.

   a) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que:

   $$0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1-u_k).$$

   b) En déduire l'inégalité $0 \leq 1 - u_k \leq a^k$ pour tout nombre entier naturel k, puis la limite $L(a)$ de la suite (u_k) pour $0 < a < 1$.

3. Limite de la suite (u_k) lorsque $a \geq 1$.

   a) On étudie ici les racines de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geq 1$.
      - Prouver que $0 \leq 1 - ln(a)/a \leq 1$ pour $a \geq 1$.
      - Exprimer l'unique racine de l'équation $f'(x) = 1$ en fonction de a.
      - En déduire la variation de la fonction $x \to f(x) - x$ pour $a = 1$, puis pour $a > 1$. Préciser dans ces deux cas le nombre des racines de l'équation $f(x) = x$.

   On convient désormais de noter $r(a)$ la plus petite racine de l'équation $f(x) = x$.
   On vérifiera en particulier que $0 < r(a) < 1$ pour $a > 1$, et que $r(1) = 1$.

   b) On étudie ici la plus petite racine $r(a)$ de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geq 1$.
      - Étudier et représenter graphiquement sur $[0, +\infty[$ la fonction $x \to xe^{-x}$. Comparer les images des nombres a et $ar(a)$ par cette fonction.
      - En déduire que la fonction Φ, définie pour $0 \leq x \leq 1$ par $\Phi(x) = xe^{-x}$, réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1/e]$ et montrer que la fonction Φ^{-1} est continue et strictement croissante sur $[0, 1/e]$ (on citera le théorème utilisé).
        Dresser le tableau de variation de Φ^{-1}.
      - Prouver que $r(a) = \dfrac{1}{a}\Phi^{-1}(ae^{-a})$, puis déterminer la limite de $r(a)$ en $+\infty$.

c) On étudie maintenant la limite de la suite (u_k) lorsque $a \geq 1$.
   - Établir l'inégalité $0 \leq u_k \leq r(a)$ pour tout nombre entier naturel k.
   - En déduire la limite $L(a)$ de la suite (u_k) pour $a \geq 1$.
   - Écrire (en PASCAL) un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de $L(a)$ à 10^{-2} près. On obtient ainsi $L(2) = 0,20$, $L(4) = 0,02$, etc.

4. Courbe représentative de la fonction $a \to L(a)$ pour $a > 0$.

   Déduire de ces résultats l'allure de la courbe représentative de la fonction $a \to L(a)$ pour $a > 0$.

Partie II

Dans cette partie, le temps est supposé discrétisé et se présente donc comme une succession d'instants $0, 1, 2, 3$, ... , n, ... et l'on considère un guichet auquel peut se présenter au plus un client dans un intervalle de temps $[n-1, n[$, c'est à dire entre deux instants consécutifs quelconques $n-1$ et n ($n \geq 1$).
On suppose qu'un premier client est au guichet à l'instant 0, et, pour tout nombre entier $n \geq 1$, on désigne par B_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 si un client se présente au guichet entre les instants $n-1$ et n, et 0 sinon (et le client ainsi arrivé se place au bout de la file d'attente devant le guichet).
Ces variables aléatoires $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ sont supposées indépendantes et prennent la valeur 1 avec la probabilité p (o $0 < p < 1$).
On appelle durée de service d'un client au guichet le temps passé par l'employé du guichet à le servir (une fois son attente dans la file achevée). Pour préciser, si la durée de service du premier client est égale à n, le guichet est libre pour le service du client suivant à partir de l'instant n.
Les variables aléatoires indiquant les durées de service au guichet des clients successifs sont supposées indépendantes et suivent la mme loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. En particulier, on notera D la variable aléatoire indiquant la durée de service au guichet du client initial.
On convient d'appeler première vague de clients l'ensemble de ceux arrivés au guichet pendant la durée de service du client initial, puis, de façon générale, on appelle $(k+1)^{ième}$ vague de clients l'ensemble de ceux arrivés pendant la durée de service des clients de la $k^{ième}$ vague. On désigne alors par N_k le nombre aléatoire des clients de la $k^{ième}$ vague (étant entendu que l'on pose $N_k = 0$ s'il n'y a pas de client de $k^{ième}$ vague). Par convention, on pose $N_0 = 1$.

1. Loi de la variable aléatoire N_1.

   a) Étant donné un nombre entier naturel n, déterminer la loi de la variable aléatoire N_1 conditionnée par l'événement $D = n$.
   On précisera les expressions des probabilités conditionnelles $P(N_1 = k/D = n)$.

   b) En déduire à l'aide de la formule des probabilités totales que N_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre et l'espérance.

2. Probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève.

   Dans toute la suite du problème, on convient de poser $p_k = P(N_k = 0)$.

   a) Prouver que l'événement:

   "la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini"

   (autrement dit: "il n'y a plus personne au guichet au bout d'un temps fin") est la réunion des événements "$N_k = 0$", pour $k \geq 1$.
   Montrer que cette suite d'événements $(N_k = 0)_{k \geq 1}$ est croissante, et en déduire:
   - que la suite $(p_k)_{k \geq 1} = (P(N_k = 0)_{k \geq 1}$ est convergente vers une limite $L \leq 1$.
   - que la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini est égale à cette limite L.

   b) Justifier, pour tout couple (j, k) de nombres entiers naturels, les formules:

   $$P(N_{k+1} = 0/N_1 = 1) = P(N_k = 0) \quad ; \quad P(N_{k+1} = 0/N_1 = j) = (P(N_k = 0))^j.$$

   c) En déduire l'expression de $p_{k+1} = P(N_{k+1} = 0)$ en fonction de p_k, préciser p_0 et, à l'aide des résultats de la partie I, la limite de la suite (p_k) et la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini.
   On discutera et interprétera le résultat obtenu en fonction des valeurs de λp.

d) Déterminer les valeurs exactes ou approchées à 10^{-2} près des probabilités pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini lorsque la durée moyenne de service d'un client au guichet est égale à $1, 2, 4$ ou 8 instants tandis que la probabilité pour qu'un client se présente au guichet entre deux instants consécutifs donnés est égale à $0,5$ d'abord, à $0,25$ ensuite.

3. Calcul de l'espérance $E(N_k)$ de la variable aléatoire N_k.

On convient d'appeler "espérance de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnée par l'événement $N_k = i$", et de noter $E(N_{k+1}/N_k = i)$, l'espérance de N_{k+1} lorsque la probabilité est la probabilité conditionnelle sachant l'événement $N_k = i$ réalisé, autrement dit l'espérance définie comme suit (si elle existe):

$$(*) \qquad E(N_{k+1}/N_k = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} jP(N_{k+1} = j/N_k = i).$$

a) On suppose l'événement $N_k = i$ réalisé. Déterminer alors la loi de la durée de service de ces i clients de la $k^{\text{ième}}$ vague en distinguant les cas $i = 0$ et $i \geq 1$.

En déduire la loi de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnée par l'événement $N_k = i$ et vérifier que $E(N_{k+1}/N_k = i) = i\lambda p$.

b) On suppose que l'espérance $E(N_k)$ existe. Établir que:

$$E(N_k) = \frac{1}{\lambda p} \sum_{i=0}^{+\infty} P(N_k = i).E(N_{k+1}/N_k = i).$$

En admettant qu'il est alors licite de permuter les symboles $\sum$ dans le calcul, établir l'existence de l'espérance $E(N_{k+1})$ et donner son expression en fonction de λ, p et de l'espérance $E(N_k)$.

c) En déduire l'existence et l'expression de $E(N_k)$.

d) Déterminer l'espérance du nombre de clients qui se présentent au guichet jusqu'à ceux de la $n^{ième}$ vague incluse.

e) Discuter et interpréter la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$ pour $\lambda p < 1$. Qu'obtient-on numériquement dans les cas évoqués au $2^o(d)$?

ANNALES DE MATHEMATIQUES 1998

ESSEC : MATH II

CORRIGE

QUESTION–1

1–a)

Faisons une récurrence.

Initialisation : $u_0 \in [0;1]$ car $u_0 = 0$.

Hérédité : Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ / $u_k \in [0;1]$.

Alors $u_k - 1 \leq 0$, ainsi que $a(u_k - 1)$ puisque $a > 0$. Par **croissance** de la fonction exponentielle, $e^{a(u_k-1)} \leq e^0 = 1$. Comme, de plus, l'exponentielle est strictement positive, on conclut que $u_{k+1} \in [0;1]$.

La propriété est héréditaire.

D'après le principe du raisonnement par récurrence, on obtient :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \in [0;1].}$$

$\forall x \in [0;1],\ f'(x) = ae^{a(x-1)} > 0$. **La fonction f est croissante sur $[0,1]$, donc la suite (u_k) est monotone.**

Son sens de variation est alors donné par la comparaison des deux premiers termes. Or, nous venons de voir que $u_1 \in [0;1]$, donc $u_1 \geq 0 = u_0$.

En conclusion $\boxed{\textbf{la suite } (u_k) \textbf{ est croissante.}}$

1–b)

D'après le **théorème des suites monotones bornées,**

$$\boxed{\text{la suite } (u_k) \text{ est convergente et sa limite, notée } L(a), \text{ appartient à } [0;1].}$$

QUESTION–2

2–a)

Sur l'intervalle $[0;1]$, $f'(x) = |f'(x)|$ car $f'(x) > 0$. D'autre part, $f''(x) = a^2e^{a(x-1)} > 0$, donc f' est croissante sur $[0;1]$.

$$\sup_{x\in[0;1]} f'(x) = f'(1) = \sup_{x\in[0;1]} |f'(x)|.$$

On peut donc appliquer entre u_k et 1, qui appartiennent tous les deux à $[0;1]$, **l'inégalité des accroissements finis : f est continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$, $|f'|$ est majorée par $f'(1) = a$.**

$\forall k \in \mathbb{N},\ |f(u_k) - f(1)| \leq f'(1)|u_k - 1|$, soit $|u_{k+1} - 1| \leq a|u_k - 1|$.

or $u_k \leq u_{k+1} \leq 1$, donc $1 - u_k \geq 0$, de même que $1 - u_{k+1} \geq 0$. On obtient, dans ces conditions :

$$\boxed{0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1 - u_k).}$$

2–b)

Procédons encore par récurrence.

Notons P_k la propriété " $0 \leq 1 - u_k \leq a^k$. "

Initialisation : $1 \leq 1 - u_0 \leq a^0$ car $u_0 = 0$. et $a^0 = 1$.

Hérédité : Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ / $0 \leq 1 - u_k \leq a^k$.

D'après le a), $0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1 - u_k)$; d'autre part, par hypothèse de récurrence, $0 \leq 1 - u_k \leq a^k$. Multiplions cet encadrement par $a > 0$, il vient

$0 \leq a(1 - u_k) \leq a^{k+1}$. Or $0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1 - u_k)$, donc $0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a^{k+1}$.

La propriété est héréditaire.

D'après le principe du raisonnement par récurrence,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq 1 - u_k \leq a^k.}$$

Comme $0 < a < 1$, on conclut $\lim\limits_{k \to +\infty} a^k = 0$.

$$\boxed{\textbf{Par encadrement :} \lim_{+\infty} u_k = 1. \text{ Donc } \forall a \in]0;1[,\ L(a) = 1.}$$

QUESTION–3

3–a)

Dans cette question $a \geq 1$.

•

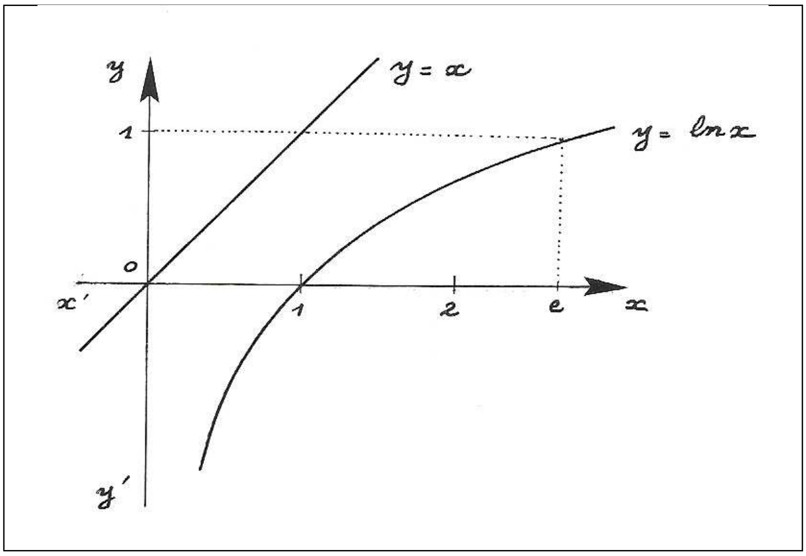
$$0 \leq 1 - \frac{\ln a}{a} \leq 1 \iff 0 \leq a - \ln a \leq a \quad \text{car } a > 0$$

$$\iff \begin{cases} \ln a & \leq a \\ -\ln a & \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln a & \leq a \\ 0 & \leq \ln a. \end{cases}$$

<u>La première inégalité</u> est classique : elle est évidente si l'on regarde les représentations graphiques de $x \longmapsto \ln x$ et $x \longmapsto x$.

Voir les courbes ci-dessous



Elle peut aussi se montrer facilement en étudiant, sur $[1; +\infty[$, la fonction d définie par $d(x) = \ln x - x$.
$d'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \leq 0$ pour $x \geq 1$. d est donc décroissante, $d(1) = -1$, donc $d(x) \leq -1 \leq 0$ sur $[1; +\infty[$.
On peut noter qu'il y a en fait inégalité stricte.
La seconde inégalité vient du fait que $a \geq 1$.
Notons qu'il y a inégalité stricte si et seulement si $a > 1$.

Finalement on a bien : $\forall a \geq 1,\ 0 \leq 1 - \frac{\ln a}{a} \leq 1.$

En fait on a l'inégalité $0 < 1 - \frac{\ln a}{a} \leq 1$, avec égalité à droite si et seulement si $a = 1$.

•

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{a(x-1)}. \\ f'(x) = 1 &\iff e^{a(x-1)} = \frac{1}{a} \\ &\iff a(x-1) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) \\ &\iff a(x-1) = -\ln a \\ &\iff x - 1 = -\frac{\ln a}{a}. \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = 1 \iff x = 1 - \frac{\ln a}{a}.}$$

•

Soit h l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) - x$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - 1 \\ h'(x) \geq 0 &\iff f'(x) \geq 1 \\ &\iff ae^{a(x-1)} \geq 1 \\ &\iff e^{a(x-1)} \geq \frac{1}{a} \quad \text{car } a > 0 \\ &\iff a(x-1) \geq \ln\left(\frac{1}{a}\right) \quad \textbf{car } \ln \textbf{ est strictement croissante} \\ &\iff x \geq 1 - \frac{1}{a}\ln a \quad \text{car } a > 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } a = 1,\ 1 - \frac{\ln a}{a} = 1.}$$

Le tableau de variations de h est le suivant :

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE