BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur :

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

CODE EPREUVE :

298

EDHECMATE

MATHEMATIQUES

Option économique

Mardi 9 mai 2006 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1) a) Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{vect}(u)$.

b) La matrice A est-elle inversible ?

2) a) Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$, dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.

b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$.

c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

3) a) Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{B}'$. En déduire la seule valeur propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1}, puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = 0$.

4) On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A).

a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \mathrm{vect}(I, N, N^2)$.

On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Établir que : $M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$. En déduire que $C_A = \mathrm{vect}(I, A, A^2)$. Quelle est la dimension de C_A ?