

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC**

---

**MATHEMATIQUES 2****Durée : 4 heures**

*L'utilisation des calculatrices est autorisée. Les deux problèmes sont indépendants*

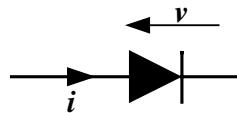
\*\*\*

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction ; si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

\*\*\*

**PROBLEME I - ETUDE D'UN WATTMETRE ELECTRONIQUE**

On se propose d'étudier le fonctionnement d'un wattmètre constitué de deux amplificateurs logarithmiques, d'un amplificateur exponentiel et d'un additionneur.

**1. Caractéristique d'une diode***Figure 1*

Dans tout le problème, les amplificateurs qui vont être étudiés utilisent une diode, schématisée sur la figure 1, dont la caractéristique courant-tension a pour équation :

$$i = I_o (e^{v/V_o} - 1)$$

où  $i$  est l'intensité de courant traversant la diode,  $v$  la tension aux bornes, et  $I_o$  et  $V_o$  sont des constantes positives.

Pour les applications numériques, on prendra :  $I_o = 10 \mu\text{A}$  et  $V_o = 25 \text{ mV}$ .

**Tournez la page S.V.P.**

Tracer qualitativement l'allure de la courbe  $i(v)$ .

## 2. Amplificateur logarithmique

On réalise le montage de la figure 2 :

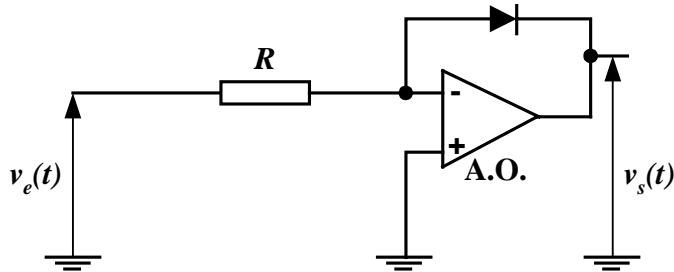


Figure 2

L'amplificateur opérationnel (A.O.) est supposé idéal et on note  $V_{sat}$  sa tension de saturation égale à  $\pm 20$  V ; les sources de polarisation ne figurent pas sur les schémas.

**2.1.** L'amplificateur opérationnel étant supposé en régime linéaire, déterminer  $v_s(t)$  en fonction de  $v_e(t)$ ,  $V_o$ ,  $I_o$  et  $R$ .

**2.2.** On suppose que  $v_e(t) = V_e \sqrt{2} \sin(\omega t)$  et que  $V_e \sqrt{2} > RI_o$  et on remarquera que  $V_{sat} \gg V_o$ . Pour  $0 < \omega t < \pi$ , et compte-tenu des signes de  $v_e$  et de  $v_s$ , justifier s'il y aura ou non saturation de l'amplificateur.

Répondre à la même question pour  $\pi < \omega t < 2\pi$ .

**2.3.** Tracer l'allure des courbes  $v_e(t)$  et  $v_s(t)$ , en fonction du temps, sur une période complète, pour  $V_e \sqrt{2} > RI_o$ .

## 3. Amplificateur exponentiel

On réalise le montage de la figure 3 :

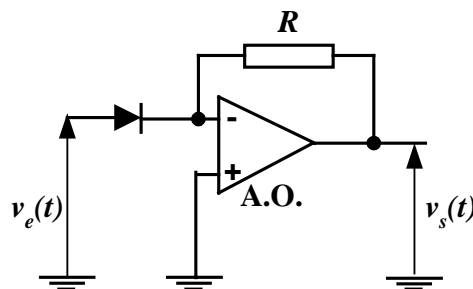


Figure 3

**3.1.** L'amplificateur opérationnel étant supposé en régime linéaire, déterminer  $v_s(t)$  en fonction de  $v_e(t)$ ,  $V_o$ ,  $I_o$  et  $R$ .

**3.2.** On suppose que  $v_e(t) = V_e \sqrt{2} \sin(\omega t)$  ; pour  $0 < \omega t < \pi$ , donner la condition que  $v_e(t)$  doit satisfaire pour que l'amplificateur soit effectivement en régime linéaire ; calculer la valeur numérique de la limite trouvée pour  $v_e(t)$  à partir des valeurs suivantes :  $R = 10^6 \Omega$  et  $V_{sat} = 20$  V.

**3.3.** Obtenir la condition entre  $V_{sat}$  et  $RI_o$  nécessaire pour que l'amplificateur opérationnel soit en régime linéaire lorsque  $\pi < \omega t < 2\pi$ , quelle que soit la valeur de  $V_e$ .

#### 4. Wattmètre électronique

On réalise maintenant le montage de la figure 4, dans lequel les amplificateurs opérationnels sont en régime linéaire :

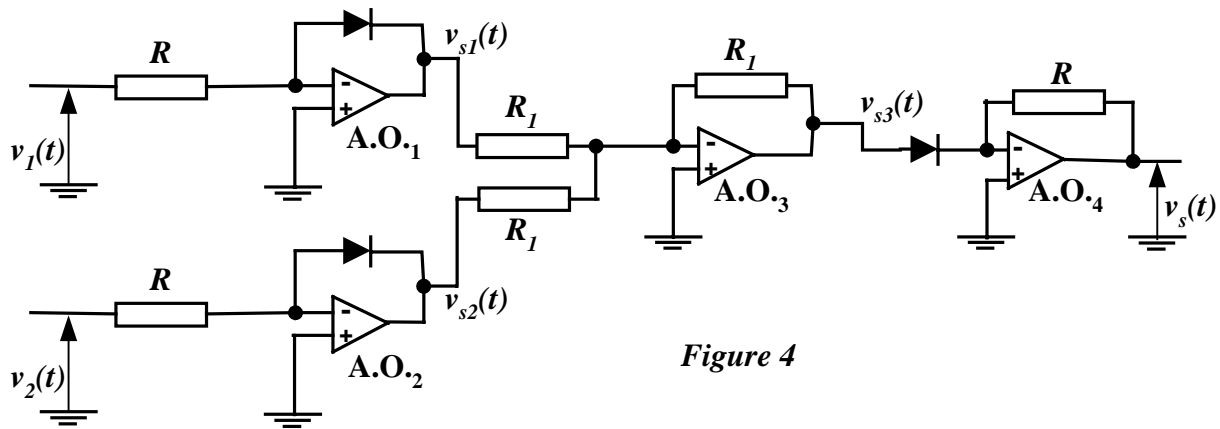


Figure 4

4.1. Exprimer  $v_{s3}$  en fonction de  $v_{s1}$  et  $v_{s2}$ , puis en fonction de  $v_1$  et  $v_2$  et des éléments du montage.

4.2. En déduire la caractéristique de transfert  $v_s = f(v_1, v_2)$  de ce montage, en fonction de  $I_o$  et  $R$ .

4.3. On considère que les tensions d'entrée sont de la forme :

$$v_1(t) = V_1 \sqrt{2} \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad v_2(t) = V_2 \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$$

Déterminer l'expression de la valeur moyenne dans le temps de la tension de sortie, notée  $\langle v_s \rangle$ .

4.4. Proposer un moyen pour mesurer  $\langle v_s \rangle$ .

4.5. On considère un dipôle constitué de résistances, bobines et condensateurs, d'impédance complexe équivalente  $\underline{Z}_{\text{éq}} = R_{\text{éq}} + jX_{\text{éq}}$  et alimenté par une tension  $v(t) = V \sqrt{2} \cos(\omega t)$  (fig.5).

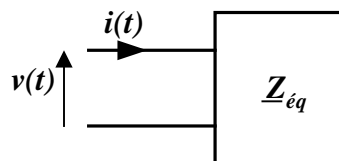


Figure 5

Exprimer la valeur moyenne  $P$  de la puissance instantanée reçue par le dipôle en fonction de  $V$ ,  $R_{\text{éq}}$  et  $X_{\text{éq}}$ , dite aussi « puissance active ».

On veut mesurer cette puissance avec le montage de la figure 4, noté  $\mathbf{W}$  ; on réalise dans ce but le montage de la figure 6, alimenté par la tension  $v(t) = V \sqrt{2} \cos(\omega t)$ :

Tournez la page S.V.P.

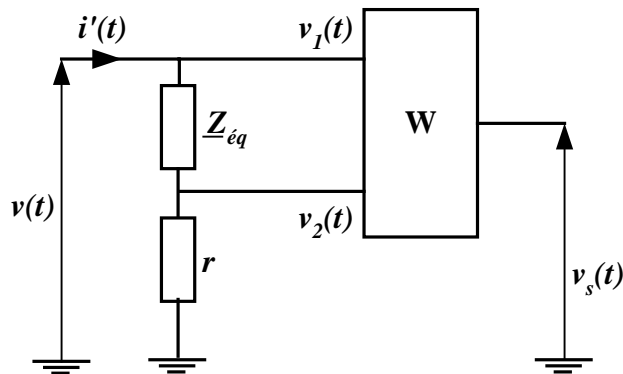


Figure 6

On considère que les intensités dans les deux entrées du wattmètre  $\mathbf{W}$  sont nulles.

4.6. Quel est le rôle de la résistance  $r$  dans le montage ? Comment doit-on choisir la valeur de celle-ci ?

4.7. Montrer que la puissance moyenne totale mesurée par le wattmètre est de la forme :

$$P' = k \langle v_s \rangle$$

Expliciter la constante  $k$  et exprimer  $P'$  en fonction de  $V$ ,  $R_{eq}$ ,  $r$  et  $X_{eq}$ .

4.8. Déterminer l'expression de l'erreur systématique relative  $\varepsilon_r = \frac{|P' - P|}{P}$  et montrer qu'elle est majorée par  $r/R_{eq}$ .

4.9. On veut éliminer l'erreur introduite par la résistance  $r$  ; on considère alors le montage de la figure 7 :

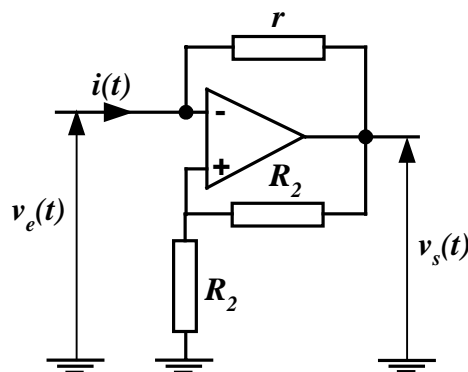


Figure 7

Calculer la résistance d'entrée  $r_e = v_e/i$  de ce montage.

**4.10.** Proposer un montage utilisant le circuit de la figure 7 qui permette de mesurer la puissance  $P$  reçue par le dipôle, sans l'erreur systématique  $\varepsilon_r$  introduite par la présence de  $r$ .

**Tournez la page S.V.P.**

Le problème de la conception d'un écran électromagnétique est un problème de champ en régime quasi-stationnaire. La pénétration du champ électromagnétique dans le domaine qui doit être écrané dépend de la fréquence  $f$ , de la conductivité électrique  $\sigma$  de l'écran, aussi bien que de la géométrie de celui-ci.

On considère le domaine à écraner situé entre deux plaques métalliques parallèles d'extension infinie, d'épaisseur  $d$  et distantes de  $2D$  (fig. 1). Les deux plaques sont planes, homogènes et isotropes, de conductivité électrique  $\sigma$  et de constantes  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  égales à celles du vide.

On rappelle leurs valeurs numériques :  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ Fm}^{-1}$  et  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$

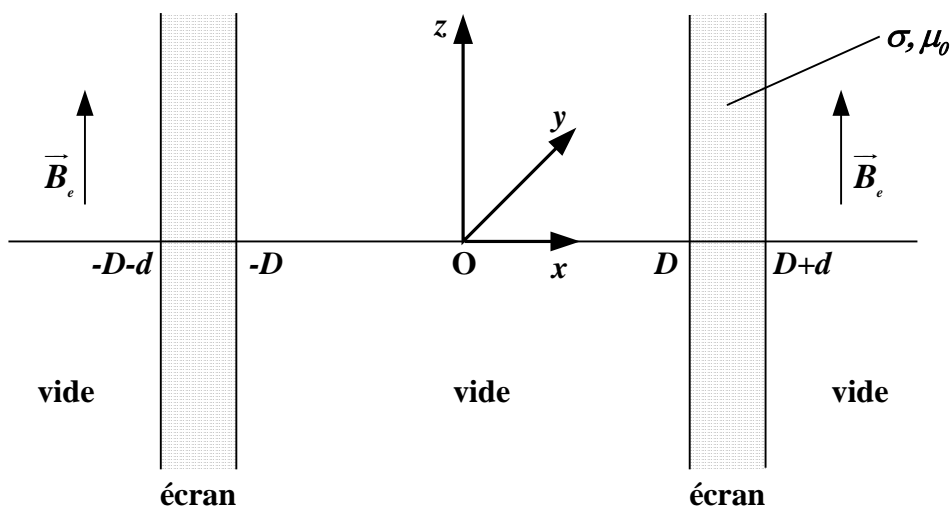


Figure 1

Dans le domaine extérieur,  $x \in ]-\infty, -D-d[ \cup ]D+d, +\infty[$ , règne un champ magnétique uniforme et variable dans le temps :

$$\vec{B}_e(t) = B_0 \sqrt{2} \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Par ailleurs, on appelle :

$\vec{B}_i = B_i(x, t) \vec{u}_z$  le champ magnétique entre les deux plaques

$\vec{E}_i = E_i(x, t) \vec{u}_y$  le champ électrique entre les deux plaques

$\vec{B} = B(x, t) \vec{u}_z$  le champ magnétique dans les plaques

$\vec{E} = E(x, t) \vec{u}_y$  le champ électrique dans les plaques.

Tous ces champs sont des fonctions harmoniques du temps  $t$  (régime sinusoïdal), de pulsation  $\omega$ .

### **1. Approximation de l'effet de peau dans un conducteur**

**1.1.** L'une des équations de Maxwell s'écrit :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

De quelle équation de Maxwell s'agit-il ? Pourquoi est-elle nommée ainsi ?

Comment appelle-t-on  $\vec{j}$  ? Quelle est son unité ?

**1.2.** Donner l'expression de la loi d'Ohm locale. Est-elle valable quelle que soit la fréquence ? Justifier qualitativement la réponse.

On admettra la validité de cette loi dans toute la suite.

**1.3.** On pose  $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Exprimer le rapport des amplitudes  $\frac{j_d}{j}$  en fonction de  $\sigma$  et de la fréquence  $f$ , en un point quelconque de la plaque.

Tracer l'allure de la courbe représentative  $\frac{j_d}{j}$  en fonction de  $f$ .

Application numérique : dans le cas de l'aluminium,  $\sigma = 36.10^6 \text{ S.m}^{-1}$  ; donner la condition vérifiée par la fréquence  $f$  pour avoir  $\frac{j_d}{j} \leq 10^{-6}$ .

*Dans toute la suite du problème, on négligera  $\vec{j}_d$  devant  $\vec{j}$  à l'intérieur des plaques métalliques ; il s'agit de l'approximation de l'effet de peau.*

## 2. Champ électromagnétique dans les plaques

**2.1.** Une autre équation de Maxwell s'écrit  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .

Comment la nomme-t-on ? Pourquoi ?

**2.2.** Ecrire les deux autres équations de Maxwell.

**2.3.** On rappelle que :  $\text{rot } (\text{rot } \vec{B}) = \text{grad } (\text{div } \vec{B}) - \Delta \vec{B}$

Donner l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le champ  $\vec{B}(x, t)$ .

**2.4.** En régime sinusoïdal, à  $B(x, t) = B(x)\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi(x))$ , on associe l'image complexe suivante :  $\underline{B}(x) = B(x) e^{j\varphi(x)}$

On note  $\underline{\gamma}^2 = j\omega\mu_0\sigma$  avec  $\sqrt{\underline{\gamma}^2} = \pm\alpha(1+j) = \pm\underline{\gamma}$

Expliciter  $\alpha$  en fonction de  $\omega, \mu_0, \sigma$ .

**2.5.** Ecrire l'équation différentielle satisfaite par  $\underline{B}(x)$  avec  $\underline{\gamma}$  comme paramètre.

**2.6.** Résoudre cette équation pour  $x \in ]D, D+d[$ , en donnant l'expression de  $\underline{B}(x)$  en fonction de deux constantes  $\underline{A}_1$  et  $\underline{A}_2$ , que l'on ne cherchera pas à déterminer dans cette question.

**2.7.** En exploitant la symétrie du système, justifier qu'il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation différentielle de  $\underline{B}(x)$  dans le domaine  $]-D-d, -D[$ .

**2.8.** A partir de l'une des équations de Maxwell judicieusement choisie, exprimer l'image complexe  $\underline{E}(x)$  du champ électrique pour  $x \in ]D, D+d[$  avec  $\mu_0, \underline{\gamma}, \sigma, \underline{A}_1$  et  $\underline{A}_2$  comme paramètres.

## 3. Expression du champ électromagnétique entre les deux plaques

**3.1.** Ecrire sans approximation les équations de Maxwell dans le vide entre les deux plaques.

**Tournez la page S.V.P.**

**3.2.** En déduire l'équation différentielle satisfaite par  $\underline{B}_i(x)$ .

**3.3.** Montrer que l'expression suivante est solution de cette équation :

$$\underline{B}_i(x) = \underline{A}_3 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_o} x\right) + \underline{A}'_3 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_o} x\right) \quad \text{où } \underline{A}_3 \text{ et } \underline{A}'_3 \text{ sont des constantes, que l'on ne cherchera}$$

pas à déterminer ici.

Donner l'expression de  $\lambda_o$  en fonction de  $\epsilon_o$ ,  $\mu_o$  et  $f$ .

**3.4.** Dans quelle condition, l'approximation de régime quasi-stationnaire est-elle justifiée dans le vide, entre les deux plaques ?

Calculer  $\lambda_o$  pour  $f = 100$  kHz et conclure.

Que peut-on dire alors de  $\underline{B}_i(x)$  dans le domaine intérieur  $-D \leq x \leq D$  avec  $D = 10$  cm ?

**3.5.** Déterminer l'image complexe  $\underline{E}_i(x)$  du champ électrique en fonction de  $\underline{A}_3$  et d'une autre constante  $\underline{A}_4$  comme paramètre.

On prendra  $\underline{B}_i = \underline{A}_3$ .

**3.6.** Comparer la symétrie de  $\vec{E}$  à celle de  $\vec{B}$  par rapport au plan  $Oyz$ . En déduire la valeur de  $\underline{E}_i(x=0)$ , puis la valeur de  $\underline{A}_4$ .

#### **4. Calcul des constantes et du facteur d'atténuation**

**4.1.** Il n'y a ni charge surfacique ni courant surfacique en  $x = D$  et en  $x = D + d$ . Justifier pourquoi.

**4.2.** Donner les relations de passage du champ magnétique et du champ électrique en  $x = D$ .

**4.3.** En déduire  $\underline{A}_1$  et  $\underline{A}_2$  en fonction de  $\underline{A}_3$ . On rappelle que  $\underline{\gamma}^2 = j\omega\mu_o\sigma$

**4.4.** Donner la relation de passage du champ magnétique en  $x = D + d$ . En déduire  $\underline{B}_i$ , donc  $\underline{A}_3$ , en fonction de  $\underline{\gamma}$ ,  $D$ ,  $d$  et  $B_o$ .

**4.5.** La valeur efficace  $B_{ieff}$  du champ  $B_i(x,t)$  est donnée par le module de l'image complexe  $\underline{B}_i$ . Exprimer  $B_{ieff}$  en fonction de  $\alpha$ ,  $D$ ,  $d$  et  $B_o$ , dans l'hypothèse double  $\alpha D \gg 1$  et  $\alpha d \gg 1$ .

**4.6.** Les plaques utilisées sont en aluminium :

$$\sigma = 36 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1} \quad \text{et} \quad \mu \cong \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$$

et les autres grandeurs ont les valeurs suivantes :  $f = 100$  kHz et  $D = 10$  cm.

Calculer la valeur du paramètre  $\alpha$ , ainsi que la profondeur de pénétration  $\delta = \frac{1}{\alpha}$  ( $\delta$  sera donnée en mm).

**4.7.** On définit le facteur d'atténuation  $a$  comme étant le rapport des valeurs efficaces :

$$a = \frac{B_{ieff}}{B_o}$$



Exprimer  $a$  en fonction de  $\alpha$ ,  $D$  et  $d$ .

Calculer l'épaisseur  $d$  d'un écran pour avoir  $a = 10^{-5}$ .

L'hypothèse faite à la question 4.5. est-elle justifiée ?

**4.8.** Nature du métal : les applications ont concerné des plaques en aluminium. Ces applications auraient-elles pu être effectuées sur des plaques en cuivre ? en fer ? Justifier la réponse.

**Fin de l'énoncé**

**Tournez la page S.V.P.**