

EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

PHYSIQUE 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

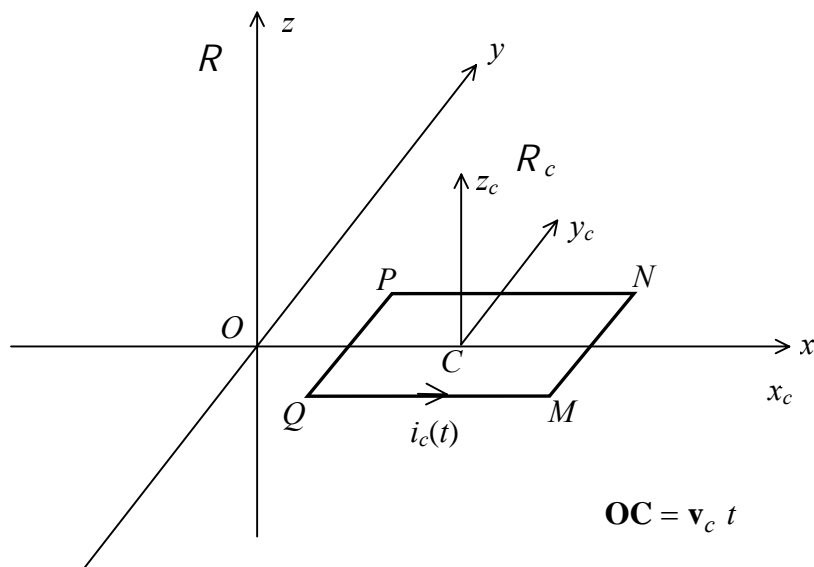
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Conformément à l'usage international, les vecteurs sont représentés en gras.

– PARTIE A –

Ce problème analyse du point de vue de l'électromagnétisme fondamental le fonctionnement d'un moteur linéaire. Dans certains types de moteurs linéaires un système statique (inducteur) crée, dans le référentiel de repos, le champ glissant auquel est soumise la partie mobile. C'est le cas que nous examinons ci-dessous. Le système considéré est décrit sur la figure I dont on respectera les conventions. Il se déplace sur des rails horizontaux, l'axe Oz est vertical ascendant et on néglige tout frottement.

Figure I

Tournez la page S.V.P.

Dans le référentiel galiléen R un cadre conducteur $MNPQ$, composé de N spires identiques en série, se déplace avec la vitesse constante $\mathbf{v}_c = v_c \mathbf{u}_x$ dans un champ électromagnétique glissant créé par des sources non représentées :

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(x, t) &= B_m \cos(\omega(t - x/v_0)) \mathbf{u}_z \\ \mathbf{E}(x, t) &= B_m v_0 \cos(\omega(t - x/v_0)) \mathbf{u}_y\end{aligned}$$

où v_0 est une vitesse donnée. On admettra que, dans les conditions de fonctionnement usuel, la valeur de B_m est constante et que le cadre se comporte comme une résistance pure r . On suppose v_c et $v_0 \ll c$ de sorte que s'appliquent les formules de changement de référentiel galiléen pour les champs. On posera $g_c = 1 - v_c/v_0$, $MN = QP = a$ et $QM = PN = b$. A l'instant $t = 0$ le centre du cadre passe à l'origine du système de coordonnées. Pour les applications numériques, on prendra :

$$a = b = 0,3 \text{ m}, B_m = 0,6 \text{ T}, N = 100, \omega = 200\pi \text{ rad.s}^{-1}, r = 0,25 \Omega \text{ et } v_0 = 60 \text{ m.s}^{-1}.$$

1. Champ électromagnétique et changements de référentiels.

On rappelle les formules de transformation pour les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} entre deux référentiels galiléens R et R' en translation parallèlement à Ox .

$$\mathbf{E}'(x', t') = \mathbf{E}(x, t) + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(x, t) \quad \mathbf{B}'(x', t') = \mathbf{B}(x, t).$$

On a noté $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_x$ la vitesse relative de R' par rapport à R , x', t' et x, t les coordonnées d'un même événement respectivement dans R' et R . On a : $x' = x - vt$, $t' = t$.

1. Etant donné les expressions ci-dessus de \mathbf{B} et \mathbf{E} dans R préciser quelle est la période spatiale (ou longueur d'onde) λ des champs.
2. Exprimer $\mathbf{B}'(x', t')$ et $\mathbf{E}'(x', t')$ dans R' en fonction de B_m, ω, v_0, x', t et $g = 1 - v/v_0$.
3. Quelles sont la pulsation ω' et la longueur d'onde λ' des champs dans R' ?
4. Quelle est la vitesse de glissement des champs dans R' en fonction de g et v_0 ?
5. Donner les expressions des champs $\mathbf{B}_0(x_0, t)$ et $\mathbf{E}_0(x_0, t)$ dans le référentiel R_0 pour lequel $v = v_0$ et commenter ces résultats.
6. Donner les expressions des champs $\mathbf{B}_c(x_c, t)$ et $\mathbf{E}_c(x_c, t)$ dans le référentiel R_c dans lequel le cadre est immobile.

2. Force électromotrice induite.

- On se place dans le référentiel R_0 . Le cadre est alors mobile dans un champ stationnaire. La force électromotrice induite dans un élément de circuit de longueur $d\mathbf{l}$ se déplaçant avec la vitesse \mathbf{v}_{c0} dans le champ \mathbf{B}_0 est alors $(\mathbf{v}_{c0} \wedge \mathbf{B}_0) \cdot d\mathbf{l} = d\varepsilon_0$.
 - Quelles sont, dans R_0 , les abscisses de M et de P en fonction du temps ?
 - Calculer la force électromotrice instantanée $\varepsilon_0(t)$ induite dans le cadre en introduisant $g_c = 1 - v_c/v_0$ dans son expression.
 - A.N. : $v_c = 58,2 \text{ m.s}^{-1}$. Calculer g_c et la valeur maximum de $\varepsilon_0(t)$.
- On se place dans le référentiel R_c dans lequel le cadre est immobile.
 - Rappeler la loi de Faraday permettant dans ce cas de calculer la force électromotrice instantanée $\varepsilon_c(t)$.
 - Quelles sont, dans R_c , les abscisses de M et de P ?
 - Calculer en fonction du temps, le flux $\Phi_c(t)$ du champ magnétique à travers le circuit fermé $MNPQ$.
 - Calculer la force électromotrice instantanée $\varepsilon_c(t)$ induite dans le cadre.
 - La valeur de la force électromotrice dépend-t-elle du référentiel dans lequel on la calcule ?

3. Courant et puissance dissipée dans le cadre.

- Quelle est la valeur instantanée de l'intensité $i_c(t)$ du courant qui parcourt le cadre ?
- Calculer la valeur moyenne P_J sur une période du courant de la puissance $p(t) = \varepsilon_c(t)i_c(t)$. Que devient l'énergie correspondante ?
- A.N. : pour $v_c = 58,2 \text{ m.s}^{-1}$, calculer la valeur maximum de $i_c(t)$ et P_J .

4. Force de Laplace.

- On rappelle que la force de Laplace est invariante par changement de référentiel galiléen. Quelle est la valeur de la résultante $\mathbf{f}_L(t)$ des forces de Laplace s'exerçant sur le cadre ? Quelle est sa valeur moyenne \mathbf{F}_L ?
- Calculer, dans R , la puissance instantanée $p_L(t)$ de \mathbf{f}_L , sa valeur moyenne P_L et tracer la courbe représentant les variations de P_L en fonction de g_c pour $-0,1 \leq g_c \leq 1,1$.
- A.N. : Calculer les valeurs de $\|\mathbf{F}_L\|$ et de P_L pour $v_c = 58,2 \text{ m.s}^{-1}$.

Tournez la page S.V.P.

5. Bilan électromécanique.

1. Comparer, dans R_0 , P_{L0} et P_J .
2. En régime permanent dans R (c.a.d. à vitesse constante) le bilan de l'énergie totale cédée par le cadre s'écrit $P_{em} + P_L + P_J = 0$ en appelant P_{em} la puissance électromagnétique transférée par le cadre mobile au champ glissant. Exprimer P_L et P_{em} en fonction de P_J et g_c .
3. Préciser les signes des puissances P_{em} et P_L en fonction des valeurs de g_c ($g_c \leq 0$, $0 \leq g_c \leq 1$, $1 \leq g_c$) et caractériser pour chacun de ces intervalles le mode de fonctionnement (moteur, générateur ou frein électromagnétique).
4. Donner les valeurs numériques des puissances P_{em} , P_L et P_J pour $v_c = 61,8 \text{ m.s}^{-1}$.

6. Commande à vitesse variable

Le système créant le champ est un système d'électroaimants dont le pas polaire b (distance entre deux pôles successifs) est une constante fixée à la construction. La période spatiale du champ est alors égale à deux fois cette distance.

1. Calculer v_0 en fonction de b et de ω .
2. On suppose constante la force \mathbf{F}_r exercée par le système entraîné. Montrer qu'alors $g_c v_0$ est constant.
3. En déduire qu'il est possible de régler la vitesse v_c à partir de la fréquence d'alimentation.
4. A.N. : La force résistante est $\|\mathbf{F}_r\| = 4666 \text{ N}$. Quelle est la fréquence avec laquelle on doit alimenter le système pour que le moteur démarre ?

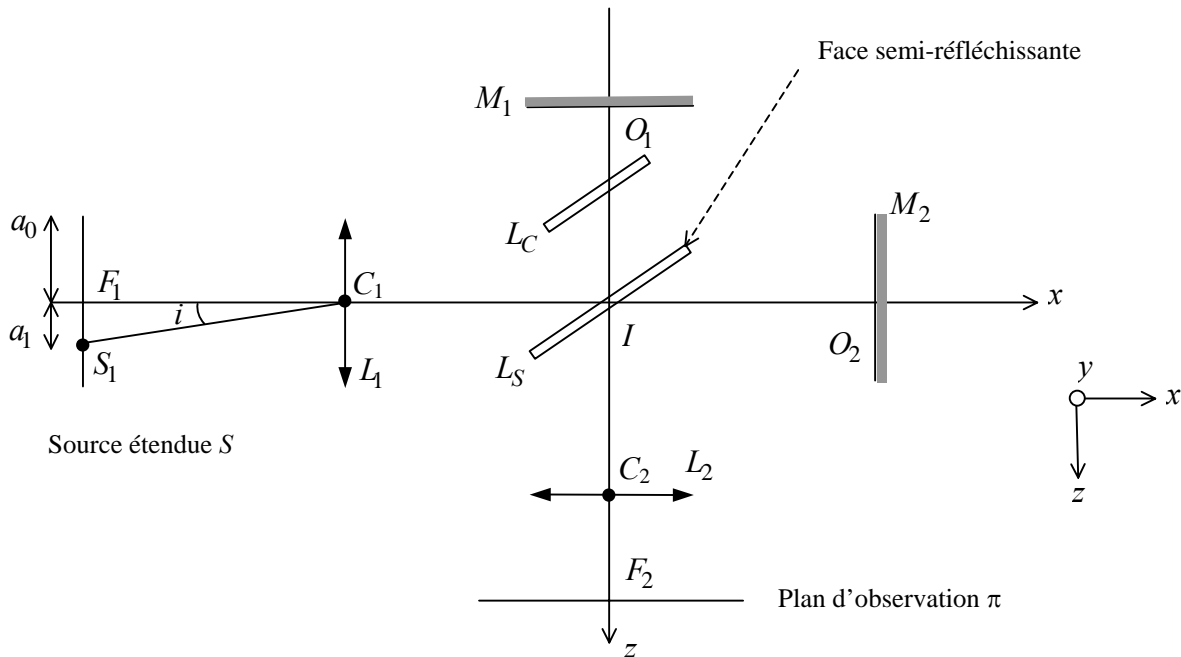
– PARTIE B –

Introduction

Ce problème, concernant l'interféromètre de Michelson est constitué de trois parties : la première partie concerne l'étude des anneaux à l'infini ramenés dans le plan focal d'une lentille. On étudie ensuite dans la seconde partie, comment cet interféromètre peut être utilisé comme spectromètre par transformée de Fourier dont on rappelle la définition au début de la partie II. La troisième partie porte sur le pouvoir séparateur de l'appareil.

Description de l'interféromètre

On considère l'interféromètre de Michelson ci-dessous où les deux miroirs plans M_1 de centre O_1 et M_2 , de centre O_2 sont perpendiculaires l'un à l'autre.



L'interféromètre comporte une lame L_S , de centre I , semi-réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice, dont le facteur de réflexion énergétique R vaut $R = 0,5$. Cette lame est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 .

L_C désigne une lame compensatrice de même épaisseur que L_S , parallèle à L_S et on fera les deux hypothèses suivantes :

- i.* on considère que cet ensemble est équivalent à une lame séparatrice infiniment mince,
- ii.* on néglige le déphasage, induit par le traitement réfléchissant de L_S , entre l'onde 1 se réfléchissant sur M_1 et l'onde 2 se réfléchissant sur M_2 .

L'interféromètre est placé dans l'air assimilé au vide.

Tournez la page S.V.P.

I – Etude des anneaux d'égalé inclinaison

On considère que M_1 est fixe et que M_2 peut être translaté suivant l'axe x , parallèlement à l'axe z . La source étendue S , monochromatique, de longueur d'onde λ dans le vide, est placée au foyer objet principal F_1 d'une lentille L_1 (voir figure), de distance focale image $f_1 = 100\text{mm}$. Cette source est assimilable à un cercle centré en F_1 de rayon a_0 dans un plan parallèle à yz .

Le plan d'observation π , parallèle au plan xy , se situe dans le plan focal d'une lentille L_2 de foyer principal image F_2 , de distance focale image $f_2 = 1\text{m}$. On note $e = IO_1 - IO_2$ où IO_1 représente la distance de I à O_1 et IO_2 , la distance de I à O_2 .

1. On considère un point S_1 , situé à la distance a_1 de F_1 et repéré par l'angle i considéré petit (voir figure).
 - (a) Quelle est la direction du faisceau issu de S_1 , après avoir traversé la lentille L_1 ?
 - (b) Représenter la marche des 2 rayons, issus du rayon S_1C_1 , jusque dans le plan π .
Remarque : on notera « rayon1 », le rayon se réfléchissant sur M_1 et « rayon2 », le rayon se réfléchissant sur M_2 .
 - (c) Montrer que tout se passe comme si le rayon 2 à la sortie de la séparatrice avait été réfléchi par un miroir virtuel M'_2 dont on indiquera la position sur un schéma.
2. Montrer alors que les rayons 1 et 2 interfèrent en un point M du plan focal de L_2 . Donner la distance F_2M . Que peut-on dire des autres rayons qui constituent le faisceau issu du point S_1 ? Montrer que la figure d'interférences est constituée d'anneaux de centre F_2 .
3. Montrer que la différence de chemin optique Δ des rayons 1 et 2 est donnée par la relation : $\Delta = 2e \cos(i)$.
4. (a) Donner l'expression de l'ordre d'interférence p au point M . En déduire l'ordre d'interférence p_0 en F_2 , défini par : $p_0 = k_1 + \varepsilon$ où k_1 est l'ordre d'interférence relatif au premier anneau brillant. Comment varie l'ordre d'interférence lorsque i augmente ?
 - (b) L'angle i étant faible, déterminer le rayon du n -ième anneau brillant appelé r_n en fonction de p_0 , n et ε .
 - (c) A.N. : $e = 1,1\text{mm}$. Déterminer p_0 puis l'ordre d'interférence et le rayon du premier et du cinquième anneau brillants pour $\lambda = 546\text{nm}$ (raie de mercure). Quel doit être le rayon a_0 de la source si l'on veut pouvoir observer les cinq premiers anneaux ?
5. (a) On diminue la valeur de e . Montrer que les anneaux semblent « rentrer ». Calculer la valeur de e pour laquelle le premier anneau disparaît. En déduire le rayon r'_1 du premier nouvel anneau et le comparer au rayon de l'anneau qui a disparu.
 - (b) Décrire le phénomène observé pour $e = 0$.

II – Spectroscopie par transformée de Fourier

On rappelle la notion de transformée de Fourier :

La transformée de Fourier de $f(\nu)$ est définie par la fonction $\hat{f}(\tau)$:

$$TF(f(\nu)) = \hat{f}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) \cos(2\pi\nu\tau) d\nu$$

$f(\nu)$ peut être définie par la transformée de Fourier inverse de $\hat{f}(\tau)$ et s'exprime par la relation :

$$f(\nu) = TF^{-1}(\hat{f}(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\tau) \cos(2\pi\nu\tau) d\tau. \text{ On dit alors que } \nu \text{ et } \tau \text{ sont des variables conjuguées.}$$

1. (a) Calculer les amplitudes A_1 et A_2 des ondes associées aux rayons 1 et 2 en fonction du coefficient de réflexion R de la séparatrice et de A_0 , amplitude de l'onde incidente sur la séparatrice.
- (b) Donner l'expression de l'éclairement $E(M)$ au point M du plan π en fonction de e , i et de l'éclairement $E_0(M)$ lorsque le miroir M_2 est occulté.

2. La puissance totale P émise par une source étendue polychromatique se répartit suivant les différentes radiations de fréquence ν , et on définit la densité spectrale de puissance $P(\nu)$ par la relation : $dP_\nu(\nu) = P(\nu)d\nu$ où $dP_\nu(\nu)$ s'exprime en Watt (W) et représente la puissance rayonnée par toute la source dans l'intervalle de fréquence $[\nu, \nu + d\nu]$. $P(\nu)$ caractérise la répartition spectrale ou le spectre de la source, que l'on cherche à déterminer par la suite. Lorsqu'une voie de l'interféromètre est occultée (pas d'interférences), l'éclairement $dE_\nu(M)$ (en W.m^{-2}) reçu au point M du plan π , dans la bande de fréquences $[\nu, \nu + d\nu]$, s'écrit : $dE_\nu(M) = K.dP_\nu(\nu) = E(\nu).d\nu$ où K est une constante de proportionnalité, indépendante de ν , dépendant de la géométrie et de la transmission de l'interféromètre.
- (a) Donner la relation entre, K , $P(\nu)$ et $E(\nu)$. En déduire que $E(\nu)$ caractérise également le spectre de la source.
- (b) Lorsque les deux voies de l'interféromètre fonctionnent et en faisant l'hypothèse que chaque bande spectrale $[\nu, \nu + d\nu]$ donne son propre système de franges d'interférences, montrer que l'éclairement $E(M)$ s'écrit : $E(M) = 2 \int_0^{\infty} E(\nu)(1 + \cos(2\pi\nu\tau))d\nu$ avec $\tau = \Delta/c$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide.
- (c) En posant $E_1 = \int_0^{\infty} E(\nu)d\nu$, montrer que $E(M)$ peut se mettre sous la forme : $E(M) = 2E_1 + 2\hat{E}(\tau)$ où $\hat{E}(\tau)$ est appelé l'interférogramme de la source. Donner l'expression de $\hat{E}(\tau)$ et préciser son unité. Que représentent E_1 et $\hat{E}(\tau)$? Exprimer alors $E(\nu)$ en fonction de $\hat{E}(\tau)$ à l'aide d'une intégrale de Fourier.

Tournez la page S.V.P.

3. Un dispositif informatique permet de commander le déplacement du miroir M_2 et donc de faire varier Δ et τ . En F_2 , foyer principal de L_2 est disposé un détecteur, supposé ponctuel dans un premier temps qui permet de mesurer l'éclairement en ce point $E(F_2)$, pour chaque valeur de Δ au point F_2 (que l'on notera Δ_0) et donc de $\tau_0 = \frac{\Delta_0}{c}$. On obtient ainsi une suite de valeurs expérimentales échantillonnées de la variable τ_0 et de $E(F_2)$. L'intégrale $E(\nu)$ est alors calculée numériquement sur ordinateur.
- Comment obtenir les valeurs échantillonnées de $\hat{E}(\tau_0)$ à partir des valeurs échantillonnées de $E(F_2)$ et de E_1 ? Montrer que l'on a réalisé un spectromètre.

III – Pouvoir de résolution

1. Question préliminaire

- (a) On considère une fonction dite « rectangle » centrée en $\nu = 0$, intervenant par la suite, définie pour $-\infty < \nu < \infty$ par :

$$f(\nu) = \text{rect} \frac{\nu}{a} = 1 \text{ si } |\nu| \leq \frac{a}{2} \text{ et } \text{rect} \frac{\nu}{a} = 0 \text{ pour les autres valeurs de } \nu.$$

Représenter la fonction rectangle en fonction de ν et calculer la transformée de Fourier $\hat{f}(\tau)$ de la fonction $f(\nu)$.

Représenter $\hat{f}(\tau)$. Pour quelles valeurs de τ , $\hat{f}(\tau)$ s'annule-t-elle la première fois ?

- (b) Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}_1(\tau)$ pour la fonction « rectangle » centrée en $\nu = \nu_0$:

$$f_1(\nu) = \text{rect} \frac{\nu - \nu_0}{a} = 1 \text{ si } |\nu - \nu_0| \leq \frac{a}{2} \text{ et } \text{rect} \frac{\nu - \nu_0}{a} = 0 \text{ pour les autres valeurs de } \nu.$$

Pour quelle valeur de τ , l'enveloppe de la fonction $\hat{f}_1(\tau)$ s'annule-t-elle la première fois ?

2. Influence du déplacement fini de M_2 .

- (a) Pour une source monochromatique de fréquence ν_0 , le spectre théorique est défini par $E_{th}(\nu) = E_0$. Représenter le spectre $E_{th}(\nu)$ en fonction de ν .
- (b) En fait, pour connaître exactement le spectre, il faut disposer de l'interférogramme $\hat{E}(\tau_0)$ complet, pour lequel τ_0 devrait varier de $(-\infty)$ à $(+\infty)$. Or, le déplacement du miroir M_2 est limité et Δ_0 varie alors de $-\Delta_m$ à Δ_m . Quel spectre calculé $E_{ca}(\nu)$ obtient-on dans le cas d'une source monochromatique de fréquence ν_0 , sachant que $\hat{E}(\tau_0) = E_0 \cdot \cos(2\pi\nu_0\tau_0)$? Représenter la fonction $E_{ca}(\nu)$ pour $\nu > 0$. Préciser l'écart $\Delta\nu_0$ qui sépare le maximum principal de cette fonction de sa première valeur nulle.

- (c) En déduire l'allure de $E_{ca}(v)$ lorsque la source comporte deux fréquences v_1 et v_2 voisines de v_0 . Calculer alors le pouvoir séparateur défini par : $R_a = \frac{v_0}{\Delta v_a}$ où Δv_a est le plus petit écart qui peut être décelé (*deux fréquences sont considérées séparées sur le spectre si l'écart en fréquence entre les maxima des figures relatives à chaque fréquence est plus grand que l'écart en fréquence entre le maximum relatif à une fréquence et la première valeur nulle relative à cette même fréquence*).

A.N. : pour la raie du mercure caractérisée par la longueur d'onde dans le vide $\lambda = 546 \text{ nm}$, calculer Δ_m et la valeur de e correspondante si l'on veut pouvoir distinguer la largeur de la raie : $\Delta\lambda = 5 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$.

3. Un autre facteur intervenant dans le pouvoir séparateur, est la taille du détecteur. En effet, celui-ci n'est pas ponctuel, mais circulaire dans un plan parallèle à xy , centré en F_2 de rayon b_0 , vu sous l'angle $2i_0$ depuis le centre de la lentille L_2 . Il est de plus sensible à la puissance reçue sur toute sa surface, notée P_{re} et l'expression de l'éclairement du II.2.b est remplacée par : $P_{re}(\tau_0) = 2 \iint K \cdot P(v) \left[1 + \cos 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \right] dv dS'$ où dS' est l'élément de surface du détecteur situé à la distance r du foyer F_2 vu sous l'angle i depuis le centre C_2 de L_2 et où l'intégration s'étend sur toutes les fréquences et sur la surface du détecteur. $P(v)$ caractérise toujours le spectre de la source.

- (a) Exprimer l'aire élémentaire dS' de l'élément de surface compris entre les circonférences de rayons (r) et $(r + dr)$ en fonction de i et f_2 (i étant un angle petit).
 (b) En déduire que P_{re} s'écrit lorsque les deux voies de l'interféromètre fonctionnent :

$$P_{re}(\tau_0) = \int_0^\infty K' P(v) I_1(v) dv \quad \text{avec} \quad I_1(v) = \int_0^{i_0} (1 + \cos(2\pi\tau_0 v \cos(i))) i di.$$

Donner l'expression de K' , puis montrer que l'intégrale I_1 (l'angle i étant faible, on écrira $\cos(i) \approx 1 - \frac{i^2}{2}$ avant d'intégrer) s'écrit :

$$I_1(v) \approx \frac{i_0^2}{2} \left(1 + \frac{\sin\left(\pi v \tau_0 \frac{i_0^2}{2}\right)}{\pi v \tau_0 \frac{i_0^2}{2}} \cos\left(2\pi v \tau_0 \left(1 - \frac{i_0^2}{4}\right)\right) \right)$$

- (c) En négligeant i_0^2 devant 1, montrer que $P_{re}(\tau_0)$ est de la forme $P_{re}(\tau_0) = P_{re_0} + K' \frac{i_0^2}{2} \cdot \hat{F}(\tau_0)$ où P_{re_0} ne dépend pas de τ_0 et $\hat{F}(\tau_0)$ représente la TF d'une fonction donnant le spectre calculé de la source $F_{ca}(v)$ que l'on précisera.

Tournez la page S.V.P.

- (d) Dans le cas où la source est monochromatique de fréquence ν_0 : $P(\nu) = P_0$ et P_{re} peut s'écrire :

$$P_{re}(\tau_0) = K'P_0 \frac{i_0^2}{2} \left(1 + \frac{\sin\left(\pi\nu_0\tau_0 \frac{i_0^2}{2}\right)}{\pi\nu_0\tau_0 \frac{i_0^2}{2}} \cos(2\pi\nu_0\tau_0) \right)$$

Donner l'expression de $\hat{F}(\tau_0)$.

En considérant la transformée de Fourier inverse de $\hat{F}(\tau_0)$ et par analogie avec la transformée de Fourier inverse de $f_1(\tau)$ (question préliminaire), montrer que le spectre calculé $F_{ca}(\nu)$ est une fonction « rectangle » dont on précisera le centre et la largeur.

- (e) En déduire le plus petit écart $\Delta\nu_b$ décelable et le pouvoir de résolution R_b qui en résulte.
4. On peut montrer que le plus petit écart en fréquence décelable est : $\Delta\nu = \sqrt{\Delta\nu_a^2 + \Delta\nu_b^2}$ et que le meilleur compromis est atteint pour $\Delta\nu_a = \Delta\nu_b$.
- (a) Calculer alors i_0 et le rayon du détecteur permettant de distinguer le profil de la raie $\lambda = 546\text{nm}$ et de largeur $\Delta\lambda = 5 \cdot 10^{-2}\text{nm}$.
- (b) Calculer le pouvoir de résolution R .

Fin de l'énoncé.