SESSION 2003

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE – FILIERE MP

PHYSIQUE 1

Durée : 4 heures

*Les calculatrices sont **autorisées**.*

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

THERMODYNAMIQUE

La première partie de ce problème rappelle certaines notions de la théorie des transferts thermiques par conduction, convection et rayonnement.

Dans la deuxième partie, un local situé dans une maison doit être rénové et l'on dispose en hiver d'un chauffage de puissance maximale P_0. On veut évaluer les températures du local et de la paroi séparant ce local de l'extérieur selon que la paroi est constituée :

a) d'une fenêtre entourée d'un mur de béton,
b) d'une baie vitrée en simple vitrage,
c) d'une baie vitrée en double vitrage.

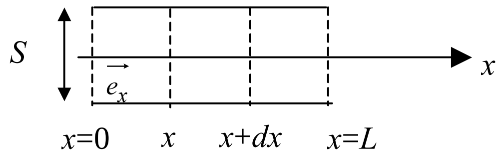
Hypothèses : Les échanges thermiques entre le local et les autres pièces de la maison sont négligés. Pour la paroi séparant le local de l'extérieur, on prendra en compte les transferts thermiques par conduction, convection et rayonnement.

I – Etude préliminaire

1. Conduction thermique

On considère un corps homogène (figure 1) de section droite S, de longueur L, de masse volumique ρ, de conductivité thermique λ, de capacité thermique massique c, avec λ, ρ, c constants. La température du matériau ne dépend que de x et de t et sera notée $T(x,t)$. Les parois parallèles à l'axe x sont isolées thermiquement et on note $\vec{J}(x,t) = J(x,t)\vec{e_x}$ le vecteur densité de courant thermique.

Tournez la page S.V.P.



$\vec{e}_x$: vecteur unitaire

Figure 1

a) Que représente $J(x,t)$? Quelle est son unité ? Enoncer alors la loi de Fourier.

b) Effectuer un bilan énergétique pour un volume élémentaire de matériau compris entre les abscisses x et $x+dx$ entre les instants t et $t+dt$ en supposant qu'il n'existe pas d'apport énergétique autre que par conduction et qu'il n'y a pas production d'énergie interne. Donner alors l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x,t)$.

On se place désormais (pour la suite des questions) en régime stationnaire.

c) Donner les lois de variation $T(x)$ et $J(x)$ en supposant que les extrémités du matériau sont maintenues à températures constantes, $T(0)=T_0$ et $T(L)=T_L$.

2. Résistance thermique due à la conduction

P_{th} représentant le flux thermique à travers la section droite S du matériau, on définit R_{th}, résistance thermique de conduction du matériau de longueur L et de surface S par la relation $T_0 - T_L = R_{th}.P_{th}$.

a) Exprimer R_{th} en fonction de L, S et λ. En faisant l'analogie avec l'électrocinétique, justifier le terme de résistance thermique et préciser l'unité de R_{th}. Quelle doit être la condition sur R_{th} pour que le flux transmis soit faible ?

b) On associe deux corps A_1 et A_2 (figure 2) de résistances thermiques R_{th_1} et R_{th_2} de même section S, l'un de conductivité thermique λ_1 est compris entre $x=0$ et $x=L_1$, le second de conductivité thermique λ_2 est compris entre $x=L_1$ et $x=L_1+L_2$. On note T_0, T_1, T_2 les températures pour $x=0$, $x=L_1$, $x=L_1+L_2$. Etablir l'expression de résistance thermique R_{th} de l'ensemble en fonction de R_{th_1} et R_{th_2}.

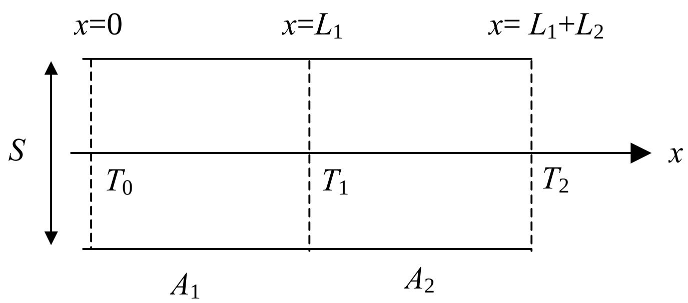


Figure 2

c) Même question lorsque les deux corps A_1, de section S_1 et de longueur L_1 et A_2 de section S_2 et de longueur L_2 sont associés en « parallèle » (figure 3). On note T_0, la température sur les faces d'entrée pour $x = 0$ et T_1 la température sur les faces de sorties pour $x = L_1$ pour A_1, et $x = L_2$ pour A_2.

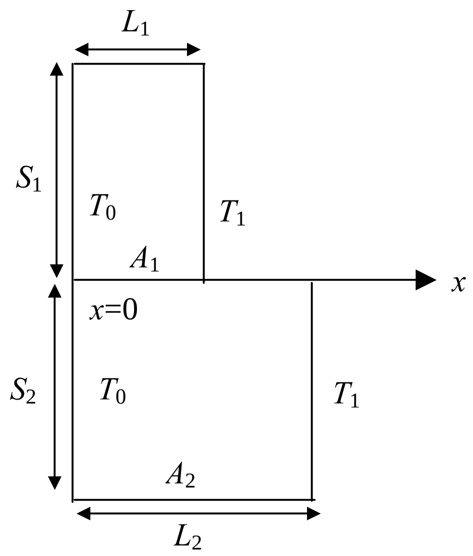


Figure 3

3. Transfert convectif

On considère une surface S à la température T, en contact avec de l'air à la température T_a et échangeant par convection avec celui-ci une puissance thermique P_c (sortant algébriquement de la surface S) s'écrivant : $P_c = h_c . S(T - T_a)$ où h_c est le coefficient de convection.

On remarquera que l'énergie thermique correspondante s'écoule du milieu où la température est la plus élevée vers le milieu où la température est la plus faible.

Montrer que cet échange convectif est décrit par une résistance thermique de convection R_c dont on donnera l'expression.

4. Transfert par rayonnement

La puissance P_R rayonnée par l'unité de surface d'un corps noir et répartie sur toutes les fréquences ν est donnée par $P_R = \int_0^{\infty} P(\nu) d\nu$ avec $P(\nu) = \dfrac{2\pi h \nu^3}{c^2 \left(\exp\left(\dfrac{h\nu}{kT} \right) - 1 \right)}$ où

$h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s (constante de Planck) et $k = 1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1} (constante de Boltzmann). $c = 3.10^{8}$ m.s^{-1} (vitesse de la lumière dans le vide).

Tournez la page S.V.P.

a) Montrer que P_R est donnée par la loi de Stephan : $P_R = \sigma . T^4$. Exprimer σ en fonction de k, h et c. On donne : $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\exp(x)-1} = \frac{\pi^4}{15}$.

b) On rappelle que la loi de Wien liant la longueur d'onde λ_m du maximum d'émission thermique du corps noir, à sa température T s'écrit : $\lambda_m . T = 2898\ \mu\text{m.K}$. On admet que l'ensemble des couches de l'atmosphère rayonne comme un corps noir à la température $T_e = 263\,\text{K}$. Calculer les valeurs respectives des longueurs d'onde λ_{ma} et λ_{m_s} du rayonnement thermique de l'atmosphère terrestre et du rayonnement thermique solaire (température de la surface du soleil T_S de l'ordre de $5700\,\text{K}$).
A quels domaines du spectre électromagnétique, ces longueurs d'onde appartiennent-elles ?

c) On considère une surface S délimitant un corps à la température T en contact avec un environnement à la température T_e. Le corps et l'environnement se conduisant comme des corps noirs, donner l'expression de la puissance P échangée par rayonnement à travers S entre le corps et l'environnement (sortant algébriquement du corps vers l'environnement).

d) On suppose que T est très proche de T_e et on pose $T = T_e + \Delta T$ avec $\Delta T << T_e$. Montrer que P peut se mettre sous la forme approchée : $P = G.(T - T_e)$ et donner l'expression de G en fonction de T_e, σ et S. Quelle est la résistance thermique de rayonnement R_R correspondante ? Montrer qu'on peut confondre T_e et T dans l'expression de R_R lorsque la forme approchée de P est du premier ordre en $(T - T_e)$.

e) Donner l'expression de la résistance thermique R si l'on considère à la fois un transfert par convection et par rayonnement entre un corps à la température T délimité par une surface S et un environnement à la température T_e.

II – Transfert à travers le mur séparant le local de l'extérieur.

On considère dans cette partie que les lois d'association des résistances thermiques vues précédemment sont vérifiées, que la puissance transmise associée soit rayonnée, de nature conductive ou convective.

1. On souhaite évaluer les pertes en puissance entre un local à la température T_{int} et le milieu extérieur à la température T_{ext}. On suppose que la paroi (figure 4) séparant le local à la température T_{int} de l'air extérieur à la température T_{ext}, est constituée d'une vitre (conductivité λ, surface S, épaisseur e) et d'un mur de béton (conductivité λ_b, surface S_b, épaisseur e_b), orthogonaux à l'axe x. La paroi, le milieu extérieur et le milieu intérieur au local se conduisent comme des corps noirs. Les transferts thermiques se font en régime stationnaire et le rayonnement solaire direct n'est pas pris en compte.

On considèrera pour la surface de la paroi en contact avec l'extérieur, un transfert thermique par convection avec l'air extérieur, à la température $T_a = T_{\text{ext}}$, et par rayonnement avec l'ensemble

des couches de l'atmosphère, à la température $T_e = T_{\text{ext}}$; on exprimera la contribution du rayonnement à la résistance thermique en fonction de T_{ext}.
Pour la surface en contact avec l'intérieur, on considère un transfert convectif et un transfert radiatif avec l'intérieur du local ; on exprimera la contribution du rayonnement à la résistance thermique en fonction de T_{int}.
On note h_i et h_e les coefficients de convection pour la surface interne et externe de la paroi.

On donne :
$\lambda = 1{,}2\,\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$, $S = 2\text{m}^2$, $e = 3\text{mm}$, $\lambda_b = 0{,}9\,\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$, $S_b = 3\,\text{m}^2$, $e_b = 0{,}3\,\text{m}$,
$h_i = 15\,\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$, $h_e = 35\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$, $T_{\text{ext}} = 273\text{K}$, $T_{\text{int}} = 293\text{K}$, $\sigma = 5{,}67.10^{-8}\,\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$.

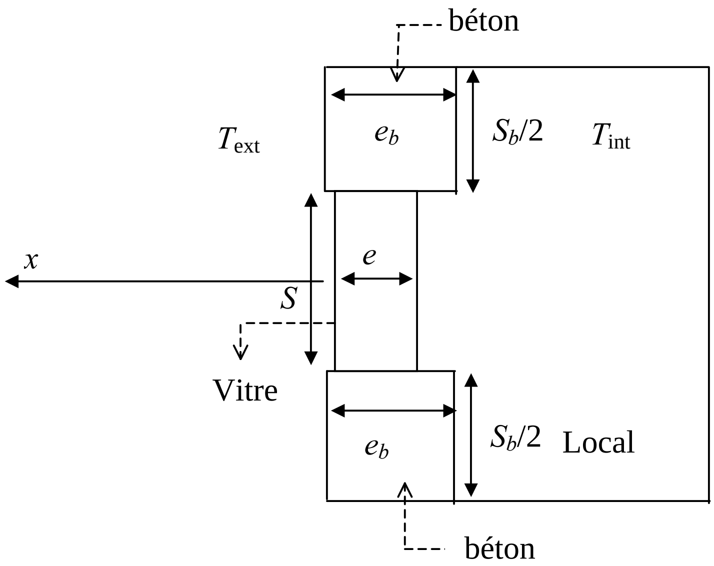


Figure 4

a) Exprimer la résistance thermique totale R_{t1} de la partie vitrée en fonction de R_{th} la résistance thermique due à la conduction, R_{ext} et R_{int} les résistances thermiques dues à la convection et au rayonnement respectivement sur la surface en contact avec l'extérieur et l'intérieur. En déduire la puissance thermique P_{t1} sortant du local à travers la partie vitrée.

b) A l'aide des résultats obtenus aux questions I.4.e) et I.2.a), calculer numériquement R_{t1} et P_{t1}.

c) Exprimer et calculer numériquement la résistance thermique totale R_{t2} de la partie en béton de la paroi ainsi que la puissance thermique P_{t2} à travers celui-ci. Comparer les valeurs numériques de P_{t1} et P_{t2}. Conclusion ?

d) Que vaut la puissance totale P_t' si la paroi est constituée simplement d'une baie vitrée de surface $S'' = 5\,\text{m}^2$?

Tournez la page S.V.P.

2. Pour des raisons de luminosité, on opte pour une paroi (figure 5) entièrement constituée d'une vitre de surface $S = 5\,\text{m}^2$ et d'épaisseur $e = 3\,\text{mm}$. Les échanges thermiques sont de même nature que dans la question 1, sauf pour l'échange par rayonnement entre la surface extérieure de la paroi et le milieu extérieur. En effet, un modèle plus réaliste envisage que l'ensemble des couches de l'atmosphère rayonne comme un corps noir à une température $T_e = T_{ciel}$ inférieure à T_{ext}. Un chauffage fournit au local la puissance calorifique $P_0 = 1500\,\text{W}$ et on note T_1 et T_2 les températures des surfaces en $x = 0$ (surface S_1) et $x = e$ (surface S_2).

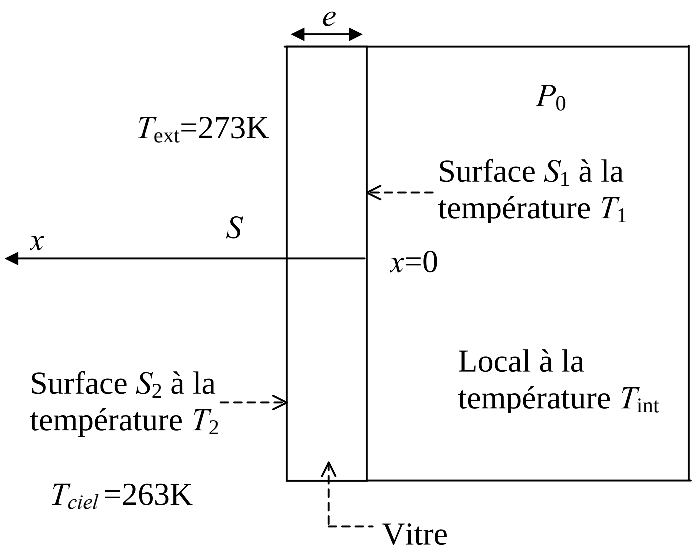


Figure 5

On désire calculer T_1, T_2, T_{int} en fonction de P_0, T_{ext}, T_{ciel} et des grandeurs relatives à la conduction, à la convection et au rayonnement.

a) Que vaut, en régime stationnaire, le flux thermique à travers S_1 et S_2 ? En exprimant la contribution du rayonnement à la résistance thermique en fonction de T_1, exprimer l'écart $T_{\text{int}} - T_1$.

b) Exprimer l'écart $T_1 - T_2$.

c) Ecrire l'équation vérifiée par le flux thermique s'écoulant vers l'extérieur à travers S_2. En supposant que T_2 puisse s'écrire sous la forme $T_2 \approx T_{\text{ext}} + \Delta T_2$ avec $\Delta T_2 << T_{\text{ext}}$, montrer que l'écart de température $T_2 - T_{\text{ext}}$ peut se mettre sous la forme : $T_2 - T_{\text{ext}} = \dfrac{P_0 - f(T_{\text{ext}}, T_{ciel})}{h_e S + 4\sigma S T_{\text{ext}}^3}$ et donner l'expression de $f(T_{\text{ext}}, T_{ciel})$.

d) A.N. : $T_{ciel} = 263\text{K}$. Calculer alors T_2, T_1 et T_{int}. Evaluer les importances respectives de la conduction, de la convection et du rayonnement.

e) Par grand vent, le coefficient de convection externe peut atteindre la valeur $h_e = 60\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$. Que valent alors, T_2, T_1 et T_{int} ? Conclusion.

3. Afin de réaliser des économies d'énergie, la paroi est finalement réalisée en double vitrage composé de deux vitres d'épaisseur $e = 3\text{mm}$, de surface $S = 5\text{m}^2$, séparées par une épaisseur $e' = 5\text{mm}$ d'air de conductivité thermique $\lambda' = 0{,}025\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$. Les différentes températures envisagées sont indiquées sur la figure 6.

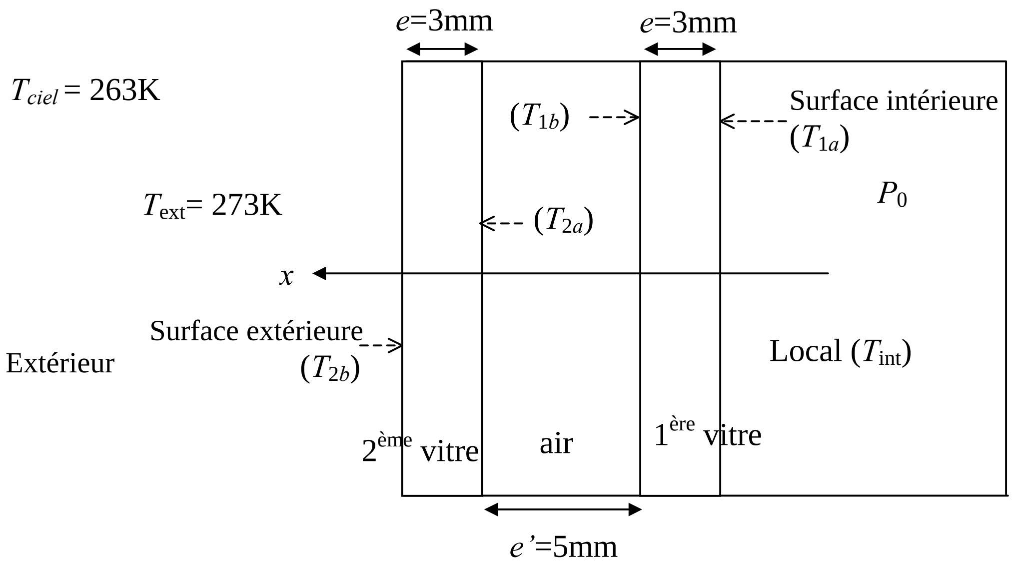


Figure 6

a) Montrer que l'on peut confondre T_{1a} et T_{1b} en s'appuyant sur les résultats de la question II.2.d)e), ainsi que T_{2a} et T_{2b}. On note alors $T_{1a} = T_{1b} = T_1$ et $T_{2a} = T_{2b} = T_2$.

b) Les échanges thermiques sont de même nature que précédemment, mais l'on considère maintenant que chacune des vitres est assimilable à un corps noir rayonnant dans 2 demi-espaces (à la température T_1 pour la première vitre et à la température T_2 pour la seconde). Pour l'air emprisonné entre les vitres, on néglige le phénomène de convection et de rayonnement pour ne considérer qu'un transfert purement conductif.

Montrer que la relation entre T_{int} et T_1 est identique au cas du simple vitrage et exprimer l'écart $T_{\text{int}} - T_1$.

c) Ecrire l'équation vérifiée par le flux thermique s'écoulant de la vitre 1 vers la vitre 2. En déduire T_1 en fonction de T_2 et P_0. Quelle est la modification par rapport au cas du simple vitrage ?

d) Montrer que la relation entre T_2 et T_{ext} est identique au cas du simple vitrage et exprimer l'écart $T_2 - T_{\text{ext}}$.

e) Calculer T_2, T_1 et T_{int}. Montrer alors qu'une valeur de P_0 divisée par 2 donnerait une valeur plus raisonnable de T_{int} (voisine de celle obtenue en II.2d).

Tournez la page S.V.P.

MECANIQUE
Conséquence de l'effet de marée sur la distance Terre-Lune

Ce problème est formé de trois parties. La première partie étudie l'effet de marée exercé par la Lune sur la Terre. La seconde partie étudie l'orbite de la Lune autour de la Terre dans le cadre du système à deux corps. La dernière partie met en évidence, à partir de la conservation du moment cinétique total du système Terre Lune, le ralentissement de la rotation de la Terre sur elle-même provoqué par l'effet de marée et l'augmentation de la distance Terre Lune qui en résulte.

Notations et données numériques :

Constante gravitationnelle $G = 6{,}67.10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2kg^{-2}}$

Masse du Soleil : $m_S = 1{,}99.10^{30}$ kg

Distance Terre Soleil : $D_S = 1{,}50.10^{11}$ m

Masse de la Lune : $m_L = 7{,}34.10^{22}$ kg

Distance moyenne Terre Lune : $D_L = 3{,}84.10^{8}$ m

Rayon de la Lune : $R_L = 1{,}75.10^{6}$ m

Masse de la Terre : $m_T = 5{,}98.10^{24}$ kg

Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}37.10^{6}$ m

Définition des différents référentiels et repères associés utilisés dans le problème :

On rappelle que le référentiel de Copernic, noté $\mathcal{R}$ dont l'origine est le centre de masse O du système solaire et les trois axes x, y, z pointent vers trois étoiles lointaines de la sphère céleste, réalise une excellente approximation d'un référentiel galiléen. Le repère associé est $\left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$.

On note T, le centre de masse de la Terre et $\mathcal{R}_T$ le référentiel barycentrique de la Terre (ou référentiel géocentrique) de repère associé $\left(T, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ avec $\overrightarrow{e_z}$: vecteur unitaire de l'axe des pôles.

On note L, le centre de masse de la Lune et $\mathcal{R}_L$ le référentiel barycentrique de la Lune (ou référentiel sélénocentrique) de repère associé $\left(L, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$.

Le Soleil, la Lune et la Terre sont supposés être sphériques à répartition de masse à symétrie sphérique.

I – Etude de l'effet de marée

1. Quel est le mouvement du référentiel géocentrique $\mathcal{R}_T$ dans le référentiel de Copernic si l'on suppose $m_L \ll m_T$? Dans ces conditions, $\mathcal{R}_T$ est-il galiléen ?

2. On considère une particule de masse m assimilée à un point matériel se trouvant au point P, au voisinage de la Terre à l'instant t. On appelle $\vec{F}$, la résultante des forces autres que les forces de gravitation et d'inertie s'exerçant sur la particule.

On note $\overrightarrow{G_S}(P)$, $\overrightarrow{G_L}(P)$, $\overrightarrow{G_T}(P)$, les champs gravitationnels créés respectivement en P par le Soleil, la Lune, et la Terre.

Les seuls astres contribuant au champ gravitationnel en P étant la Lune, la Terre et le Soleil, montrer que l'on peut écrire le principe fondamental de la dynamique pour la particule dans le référentiel $\mathcal{R}_T$ sous la forme :

$m\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F} + m\overrightarrow{G_T}(P) + m\overrightarrow{G_L}(P) + m\overrightarrow{G_S}(P) - m\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}}$ où $\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T}$ et $\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}}$ désignent les accélérations des points P et T, respectivement dans $\mathcal{R}_T$ et $\mathcal{R}$.

3. On suppose $\vec{F} = \vec{0}$. M étant un point de la Terre, on montre qu'en faisant un développement de $\overrightarrow{G_S}(M)$ et de $\overrightarrow{G_L}(M)$ au voisinage de T, on peut écrire : $\overrightarrow{G_S}(M) \approx \overrightarrow{G_S}(T) + \left[\left(\overrightarrow{TM}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{G_S}\right]_T$ et $\overrightarrow{G_L}(M) \approx \overrightarrow{G_L}(T) + \left[\left(\overrightarrow{TM}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{G_L}\right]_T$ où $\left(\overrightarrow{TM}.\overrightarrow{grad}\right)$ est un opérateur appliqué à $\overrightarrow{G_S}$ ou $\overrightarrow{G_L}$, dont le résultat est calculé en T.

a) En considérant la Terre comme un système de points discrets A_i, de masse m_i, tels que $\sum_i m_i = m_T$, exprimer $\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}}$ en appliquant le théorème du centre d'inertie à la Terre.

b) Montrer alors que l'on peut écrire : $m\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T} = m\overrightarrow{G_T}(P) + m\overrightarrow{C_L}(P) + m\overrightarrow{C_S}(P)$ où $\overrightarrow{C_L}(P) = \overrightarrow{G_L}(P) - \overrightarrow{G_L}(T)$ représente le champ de marée dû à la Lune en P et $\overrightarrow{C_S}(P) = \overrightarrow{G_S}(P) - \overrightarrow{G_S}(T)$ représente le champ de marée dû au Soleil en P.

4. On suppose l'astre considéré (Soleil ou Lune), de centre A ($A = S$ ou $A = L$) de masse m_A situé à la distance D_A de T telle que $\overrightarrow{TA} = D_A\,\overrightarrow{e_x}$, dans le plan équatorial.

On considère les points P_1 et P_2 de la surface terrestre de coordonnées $(R_T, 0, 0)$ et $(-R_T, 0, 0)$ dans le repère associé au référentiel $\mathcal{R}_T$. En considérant que $\frac{R_T}{D_A} << 1$ évaluer le champ de marée $\overrightarrow{C_A}(P_1)$ et $\overrightarrow{C_A}(P_2)$. Quelle est la direction de ces deux vecteurs ? Faire un schéma. Evaluer numériquement le terme $\frac{2\mathcal{G}\, m_A R_T}{D_A^3}$ dans le cas où l'astre A est le Soleil, puis la Lune.

Quel est l'astre qui a l'effet le plus important ?

Tournez la page S.V.P.

II – Trajectoire de la Lune

On néglige les effets dus au Soleil ; le système Terre-Lune est donc considéré isolé et on s'intéresse aux mouvements relatifs de la Terre et de la Lune. On considère le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ du système Terre-Lune et on appelle C le centre de masse de l'ensemble.

$\overrightarrow{\Omega_L}$ et $\overrightarrow{\Omega_T}$ désignent le vecteur vitesse angulaire de rotation propre respectivement de la Lune dans $\mathcal{R}_L$ et de la Terre dans $\mathcal{R}_T$.

$J_L = \frac{2}{5} m_L R_L^2$ désigne le moment d'inertie de la Lune par rapport à son axe de rotation dans $\mathcal{R}_L$.

$J_T = \frac{2}{5} m_T R_T^2$ désigne le moment d'inertie de la Terre par rapport à son axe de rotation dans $\mathcal{R}_T$.

On désigne par $\overrightarrow{L^*}(T,L)$ le moment cinétique du système Terre-Lune dans le référentiel $\mathcal{R}^*$.

On désigne respectivement par $\overrightarrow{L_C^*}(T)$, $\overrightarrow{L_C^*}(L)$ les moments cinétiques au point C dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ de la Terre, de la Lune.

$\overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T}$ et $\overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L}$ sont respectivement, les vecteurs moments cinétiques de rotation propre de la Terre au point T dans le référentiel $\mathcal{R}_T$ et de la Lune au point L dans le référentiel $\mathcal{R}_L$.

1. a) Montrer que $\overrightarrow{L^*}(T,L)$ se conserve.

b) La répartition de masse de la Lune et la Terre étant à symétrie sphérique, montrer que $\overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T}$ et $\overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L}$ se conservent. En déduire que $\overrightarrow{\Omega_T}$ et $\overrightarrow{\Omega_L}$ sont constants.

2. a) En considérant la Terre comme un système de points discret, montrer que : $\overrightarrow{L_C^*}(T) = \overrightarrow{CT} \wedge m_T \overrightarrow{V_{T/\mathcal{R}^*}} + \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T}$ où $\overrightarrow{V_{T/\mathcal{R}^*}}$ représente le vecteur vitesse de T dans le référentiel $\mathcal{R}^*$.

b) Donner la relation analogue pour $\overrightarrow{L_C^*}(L)$.

c) En déduire que $\overrightarrow{L^*}(T,L)$ peut se mettre sous la forme :
$\overrightarrow{L^*}(T,L) = \overrightarrow{L_{orb}^*} + \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T} + \overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L}$ où $\overrightarrow{L_{orb}^*}$ désigne le moment cinétique orbital dans $\mathcal{R}^*$ du système Terre-Lune. Exprimer $\overrightarrow{L_{orb}^*}$ en fonction de $\overrightarrow{CT}$, m_T, $\overrightarrow{V_{T/\mathcal{R}^*}}$ et de $\overrightarrow{CL}$, m_L, $\overrightarrow{V_{L/\mathcal{R}^*}}$.

3. On appelle M la particule fictive, telle que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{TL}$ de masse réduite $\mu = \dfrac{m_T m_L}{m_T + m_L}$ de vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{M/R^*}}$.

a) Calculer les vecteurs $\overrightarrow{CL}$ et $\overrightarrow{CT}$ en fonction de m_T, m_L et $\overrightarrow{TL}$. En déduire les vecteurs vitesses $\overrightarrow{V_{T/R^*}}$ et $\overrightarrow{V_{L/R^*}}$ des points T et L dans le référentiel $\mathcal{R}^*$, en fonction de $\overrightarrow{V_{M/R^*}}$.

b) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{R}^*$ pour L et T, et montrer que cela revient à considérer la particule fictive soumise à la force exercée par la Terre sur la Lune.

4. a) Exprimer $\overrightarrow{L^*_{orb}}$ en fonction de $\overrightarrow{V_{M/R^*}}$ et μ. Montrer alors que le mouvement de la particule fictive est plan.

b) En considérant que $m_T >> m_L$, à quels points peut-on assimiler les points C et M ? Avec quel référentiel peut-on confondre $\mathcal{R}^*$?

5. On suppose la condition précédente remplie. On se place dans le plan de la trajectoire de L et on introduit le repère des coordonnées polaires $\left(T, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}\right)$ tel que $\overrightarrow{TL} = r\,\overrightarrow{e_r}$.

a) Etablir par la méthode de votre choix l'équation différentielle suivie par $u(\theta) = \dfrac{1}{r(\theta)}$.

Montrer que l'équation de la trajectoire s'écrit : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta)}$ où l'on donnera les significations de p et e.

b) Le périgée est caractérisé par $r_p = 363\,000\ \text{km}$ et l'apogée par $r_a = 405\,000\ \text{km}$. Calculer p et e.

c) Montrer que la trajectoire de la Lune autour de la Terre peut être assimilée à un cercle dont on donnera le rayon D_L. Calculer la vitesse angulaire orbitale ω_L de la Lune autour de la Terre, puis la vitesse v_L de la Lune sur son orbite par rapport au référentiel $\mathcal{R}_T$.

6. a) Evaluer numériquement le moment cinétique orbital $\overrightarrow{L^*_{orb}}$, ainsi que les moments cinétiques de rotation propre $\overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T}$, $\overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L}$ et les comparer entre eux.

Données : $\Omega_L = 2{,}66\ 10^{-6}\,\text{rad s}^{-1}$ $\qquad$ $\Omega_T = 7{,}29\ 10^{-5}\,\text{rad s}^{-1}$

b) En supposant les vecteurs $\overrightarrow{\Omega_T}$ et $\vec{\omega}_L$ colinéaires et dirigés suivant $\overrightarrow{e_z}$, montrer alors que l'on peut écrire : $\overrightarrow{L^*}(T,L) \approx \left(m_L\sqrt{\mathcal{G}\, D_L m_T} + J_T \Omega_T\right)\overrightarrow{e_z}$.

Tournez la page S.V.P.

III – Eloignement de la Lune

En généralisant à un point quelconque de la Terre, le calcul fait dans la partie I, on peut montrer que l'effet de marée se traduit par l'existence de deux bourrelets diamétralement opposés, alignés avec la ligne des centres de l'astre A et de la Terre.
En fait, les bourrelets de marée sont entraînés par la rotation de la Terre, plus rapide que le mouvement de la Lune sur son orbite et se trouvent donc décalés par rapport à la direction Terre-Lune d'un angle α (voir figure 7). La Lune exerce alors une action dont le moment sur les bourrelets tend à freiner la rotation de la Terre. Le système Terre-Lune étant toujours considéré isolé dans l'espace, son moment cinétique total $\overrightarrow{L^*}(T,L)$ se conserve. La diminution du moment cinétique de rotation propre de la Terre est alors compensée par une augmentation du moment cinétique orbital de la Lune et donc par une augmentation progressive de la distance Terre-Lune. Cette troisième partie veut quantifier cet effet.

1. La surface de la Terre étant essentiellement recouverte par les océans, on modélise le phénomène des marées par deux bourrelets d'eau symétriques de hauteur h formant un ellipsoïde tangent à la sphère terrestre (voir figure 7). Calculer la masse m_b de l'ensemble des deux bourrelets.

Données : Volume d'un ellipsoïde de demi grand axe a et de demi petit axe b : $V = \frac{4}{3}\pi a b^2$

Masse volumique de l'eau : $\rho = 1000\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ $\qquad h = 0{,}50\,\mathrm{m}$

2. On admettra que le moment en T des forces exercées par la Lune sur l'ensemble (Terre sphérique + bourrelets) $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ peut s'écrire en première approximation $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_1 + \overrightarrow{\mathcal{M}}_2$ où $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_2}$ sont les moments en T des forces $\overrightarrow{F_1} = \frac{m_b}{2}.\overrightarrow{C_L}(P_1)$ et $\overrightarrow{F_2} = \frac{m_b}{2}.\overrightarrow{C_L}(P_2)$ résultant de l'action de la Lune sur les points P_1 et P_2 de masse $\frac{m_b}{2}$ situés sur la droite de déformation maximale formant l'angle α avec l'axe $\overrightarrow{e_r}$.
Exprimer $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ en fonction de m_b et des vecteurs $\overrightarrow{G_L}(P_1)$, $\overrightarrow{G_L}(P_2)$ et $\overrightarrow{TP_1}$.

3. On admettra qu'en faisant l'hypothèse que $\frac{R}{D_L} << 1$, $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ peut s'écrire : $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{-A\ \sin(2\alpha)}{D_L^3}\overrightarrow{e_z}$

où $A = \frac{3}{2}\mathcal{G}\ m_b.m_L.(R+h)^2$. On obtient pour $\alpha = 3°$, $\|\vec{\mathcal{M}}\| = \mathcal{M} = 4{,}5.10^{16}\,\mathrm{SI}$.

a) J_T gardant la même valeur définie dans la partie II, exprimer alors $\frac{d\Omega_T}{dt}$ et calculer sa valeur numérique.

b) On appelle T la période de rotation propre terrestre. Exprimer $\frac{dT}{dt}$ en fonction de Ω_T et