ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

1) a) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

b) Calculer u_0.

En intégrant par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$, exprimer cette dernière en fonction de u_0 et en déduire u_1.

2) Etudier la variation de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

3) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{2n-2}\sqrt{1+x^2}dx$.

a) Exprimer, pour $n \geq 1$, $u_n + u_{n-1}$ en fonction de I_n.

b) En intégrant I_n par parties, montrer que, pour $n \geq 1$,

$$2nu_n + (2n-1)u_{n-1} = \sqrt{2}.$$

4) a) En utilisant 3 b) et la croissance de (u_n), montrer que

$$\forall n \geq 1,\ u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{4n-1}.$$

b) En déduire que la suite (nu_n) est convergente et déterminer sa limite.

5) Que peut-on dire de la série de terme général u_n ?

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE