



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### ANALYSE

### ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

#### ENONCE-6

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on considère la fonction  $g_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g_n(x) = \int_0^x e^{t^2} dt + \int_0^{nx} e^{-t^2} dt - \frac{1}{2}.$$

- 1) Montrer que pour tout réel positif  $x$  on a l'inégalité  $\int_0^x e^{t^2} dt \geq x$ .
- 2) Déterminer les limites de  $g_n$  quand  $x \rightarrow +\infty$  puis  $-\infty$ .
- 3) Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , l'équation  $g_n(x) = 0$  admet une unique solution que l'on notera  $\alpha_n$ . Montrer que  $\alpha_n \in ]0, 1[$ .
- 4) Déterminer une relation entre  $g_{n+1}(x)$  et  $g_n(x)$  et montrer que la suite  $(\alpha_n)$  converge.
- 5) Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . Déterminer le signe de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(\varepsilon)$  (on rappelle que  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ) et déduire qu'il existe un entier  $n_0$  tel que  $\alpha_{n_0} < \varepsilon$ .

En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ .