



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-5

Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$a_n = \left(\int_0^1 (\sqrt{1+x^2})^n dx \right)^{\frac{1}{n}}.$$

1) a) Calculer a_2 .

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

c) En utilisant la fonction $x \mapsto f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, calculer a_1 .

2) Montrer que la suite (a_n) est majorée.

3) a) Montrer que

$$\forall n \geq 1, 2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \geq \left(\sqrt{2} - \frac{1}{n\sqrt{2}} \right)^2.$$

b) En utilisant la variation de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$, montrer que, pour $n \geq 1$ et $x \in [1 - \frac{1}{n}, 1]$, on a $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{2} - \frac{1}{n\sqrt{2}}$.

c) En déduire la limite de la suite (a_n) .