## ANALYSE

## ENONCE DE L'EXERCICE

# ENONCE :

**ENONCE−3**

Soit $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $f$ l'application de $I$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan(x)$.

**1)** Déterminer une relation entre $f$ et $f'$ et en déduire que $f$ est indéfiniment dérivable.

**2)** Exprimer, pour tout entier naturel $n$, $f^{(n+1)}$ en fonction de $f, f', \ldots, f^{(n)}$ ; en déduire que, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a $f^{(n)}(x) \geq 0$.

**3)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

**a)** Exprimer $a_{n+1}$ en fonction de $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

**b)** Montrer que $f^{(k)}$ est une fonction qui a la même parité que le nombre $k+1$.

**c)** Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n}$.

**4)** Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, et tout entier $n \in \mathbb{N}$, en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $f(x) \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.


**Jean MALLET et Michel MITERNIQUE**