



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-27

Soit N un entier naturel non nul. On considère une urne contenant initialement N boules numérotées de 1 à N . On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule de la manière suivante :

- Au premier tirage on tire une boule au hasard ;
- soit i le numéro de la boule tirée à un tirage quelconque. Celle-ci est remise dans l'urne et toutes les boules de l'urne portant un numéro strictement inférieur à i sont retirées de l'urne et remplacées par autant de boules portant le numéro i ; on effectue alors le tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée lors du $n^{\text{ème}}$ tirage.

1) Déterminer la loi de X_1 .

2) a) Calculer, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, la probabilité

$$P_{X_1=i}(X_2 = j).$$

b) Déterminer la loi de X_2 .

3) a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n (X_k = 1) = (X_n = 1).$$

b) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1)$.

4) a) Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_{n+1} = N) = \frac{N-1}{N}P(X_n = N) + \frac{1}{N}.$$

b) En déduire la valeur de $P(X_n = N)$ en fonction de n et de N .

5) On note V_n la matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = AV_n$.

b) A est-elle diagonalisable ?

6) On suppose dans cette question que $N = 3$. Déterminer la loi de X_n ?

INDICATIONS DE SOLUTION

question 2–b) pour la loi de X_2 , on trouvera $\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(X_2 = j) = \frac{2j-1}{N^2}$

question 5–a) pour la loi de X_{n+1} on trouvera

En résumé :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{N}P(X_n = 1)$$

$$\forall j / 2 \leq j \leq N-1, P(X_{n+1} = j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j-1} P(X_n = i) + \frac{j}{N} P(X_n = j)$$

$$P(X_{n+1} = N) = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} P(X_n = j) \right) + P(X_n = N).$$

et pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{N} & \frac{2}{N} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$$