PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−27

Soit N un entier naturel non nul. On considère une urne contenant initialement N boules numérotées de 1 à N. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule de la manière suivante :

- Au premier tirage on tire une boule au hasard ;
- soit i le numéro de la boule tirée à un tirage quelconque. Celle-ci est remise dans l'urne et toutes les boules de l'urne portant un numéro strictement inférieur à i sont retirées de l'urne et remplacées par autant de boules portant le numéro i ; on effectue alors le tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée lors du n ème tirage.

1) Déterminer la loi de X_1.

2) a) Calculer, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, la probabilité

$$P_{X_1=i}(X_2=j).$$

b) Déterminer la loi de X_2.

3) a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \bigcap_{k=1}^{n}(X_k=1)=(X_n=1).$$

b) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n=1)$.

4) a) Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_{n+1}=N)=\frac{N-1}{N}P(X_n=N)+\frac{1}{N}.$$

b) En déduire la valeur de $P(X_n=N)$ en fonction de n et de N.

5) On note V_n la matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$V_n=\begin{pmatrix} P(X_n=1) \\ \vdots \\ P(X_n=N) \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1}=AV_n$.

b) A est-elle diagonalisable ?

6) On suppose dans cette question que $N=3$. Déterminer la loi de X_n?

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

INDICATIONS DE SOLUTION

question 2−b) pour la loi de X_2, on trouvera $\forall j \in [\![1, N]\!], P(X_2 = j) = \dfrac{2j-1}{N^2}$

question 5−a) pour la loi de X_{n+1} on trouvera

> **En résumé :**
>
> $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{N} P(X_n = 1)$
>
> $\forall j \;/\; 2 \leq j \leq N-1,\; P(X_{n+1} = j) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} P(X_n = i) + \dfrac{j}{N} P(X_n = j)$
>
> $P(X_{n+1} = N) = \left(\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N-1} P(X_n = j) \right) + P(X_n = N).$

et pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{N} & \frac{2}{N} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$$