



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-26

Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une ou de deux unités vers la droite suivant la procédure suivante :

- Au départ la puce est en O .
- Si à un instant la puce est sur la case d'abscisse k , l'instant d'après elle sera soit sur la case d'abscisse $k + 1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit sur la case d'abscisse $k + 2$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

- Les sauts sont indépendants.

1) On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts d'une unité effectués par la puce au bout de n sauts. Déterminer la loi de S_n et son espérance $E(S_n)$.

2) On note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce après n sauts. Déterminer la loi de X_n , son espérance et sa variance.

3) On note Y_n la variable égale au nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la case d'abscisse n .

a) Déterminer $Y_n(\Omega)$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier $k \geq 1$:

$$P(Y_n = k) = \frac{1}{2}P(Y_{n-1} = k - 1) + \frac{1}{2}P(Y_{n-2} = k - 1).$$

c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$E(Y_n) = \frac{1}{2}E(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}E(Y_{n-2}) + 1.$$

4) Déterminer un réel a tel que la suite (u_n) définie par $u_n = E(Y_n) - na$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Déterminer alors u_n , puis $E(Y_n)$ en fonction de n .

INDICATIONS DE SOLUTION

Dans la question numéro 3), on pourra, pour le calcul de l'espérance, distinguer les cas n pair et n impair