



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–25

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^2 dont la loi de probabilité est donnée par la formule :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = c \frac{i + j}{3^{i+j} i! j!}.$$

- 1) Calculer la constante c (un joli calcul de somme double).
- 2) Déterminer les lois marginales de X et Y . Ces deux variables sont-elles indépendantes ?
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$.
- 4) Déterminer la loi de la variable Z qui est la variable $Y - 1$ conditionnée par l'événement $(X = 0)$.

INDICATIONS DE SOLUTION

Pour la question 1), on pourra écrire

$$S = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} cS(n, m)$$

$$\text{où } S(n, m) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} \frac{i+j}{3^{i+j} i! j!}.$$

Puis

$$S(n, m) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{i}{3^i i!} \sum_{j=0}^m \frac{1}{3^j j!} \right) + \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{3^i i!} \sum_{j=1}^m \frac{j}{3^j j!} \right)$$