ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−15

1) On considère la fonction φ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}.$$

a) Justifier l'existence sur $\mathbb{R}$ d'une primitive de φ, que l'on notera Φ.

b) On considère l'application g définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$g(u) = \Phi(\frac{1 + \tan u}{2}).$$

Prouver que g est dérivable sur I et montrer que g est une fonction affine.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)dt$.

2) Soit p et q deux entiers naturels. On pose $I(p, q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

a) Déterminer une relation entre $I(p+1, q+1)$ et $I(p+2, q)$.

b) En déduire $I(n, n)$ en fonction de n.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{2^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

b) Simplifier l'expression $\dfrac{1}{2t^2 - 2t - 1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k t^k (1-t)^k$, pour $t \in [0; 1]$.

En déduire la convergence de la série de terme général v_n et calculer sa somme.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE