ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−10

1) Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{r_n}{n!}$, avec $r_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

2) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq r_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite (r_n).

3) a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = \frac{1}{n+1} + \frac{r_{n+1}}{n+1}.$$

b) Montrer, en utilisant la question **2)**, que

$$\frac{r_{n+1}}{n+1} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

4) a) En exprimant que $\frac{r_{n+1}}{n+1} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, déduire qu'il existe une fonction α telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{r_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\alpha(n), \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to +\infty} \alpha(n) = 0.$$

En déduire que $\frac{r_n}{n+1} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

b) Conclure, en utilisant la question **3) a)** que

$$r_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

5) Retrouver ce dernier résultat plus facilement sans utiliser le **b)** de la question **3)**.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE