ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−12

Soit $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$, $n+1$ réels distincts ($n \in \mathbb{N}$).
1) On considère l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \cdots, P(a_n)).$$

Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et donner sa matrice dans les bases canoniques des deux espaces vectoriels.
2) Soit $(R_0, R_1, \cdots R_n)$ une famille de polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que,
pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on ait $\deg(R_k) = k$.
Montrer par récurrence sur n que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, notée $\mathcal{B}$.
3) Soit P un polynôme de degré n.
On considère la famille $(P, P', \dfrac{P''}{2!}, \cdots \dfrac{P^{(n)}}{n!})$.
a) Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, notée $\mathcal{B}_1$.
b) Soit P un polynôme de degré n. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, Q_k est le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q_k(x) = P(x + a_k).$$

- Montrer que les coordonnées de Q_k dans la base $\mathcal{B}_1$ sont $(1, a_k, \ldots, a_k^n)$.
- Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \cdots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (on pourra utiliser : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$).

4) Soit P un polynôme de degré n. On considère les familles de nombres distincts suivantes : $(x_0, x_1, \cdots x_n)$ et $(y_0, y_1, \cdots y_n)$.
Montrer que la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, où $a_{i,j} = P(x_i + y_j)$ est inversible.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

INDICATIONS DE SOLUTION