# ALGEBRE LINEAIRE

## ENONCE DE L'EXERCICE

## ENONCE :

### ENONCE–10

Soit $E$ un espace vectoriel réel et $f$ un endomorphisme de $E$. On rappelle que, par convention, $f^0 = \mathrm{Id}$ où Id est l'application identique de $E$.

**1)** Montrer que :

**a)**

$$\mathrm{Ker}\, f^0 \subset \mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2 \subset \ldots \mathrm{Ker}\, f^n \subset \mathrm{Ker}\, f^{n+1} \ldots$$

**b)**

$$\mathrm{Im}\, f^0 \supset \mathrm{Im}\, f \supset \mathrm{Im}\, f^2 \supset \ldots \mathrm{Im}\, f^n \supset \mathrm{Im}\, f^{n+1} \ldots$$

**2)** On suppose dorénavant que $\dim E = n,\ n > 0$.

Montrer, on considérant les dimensions de $\mathrm{Ker}\, f^p$ pour $p \in [\![0, n]\!]$, qu'il existe un entier $0 \leq k \leq n$ tel que $\mathrm{Ker}\, f^k = \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$.

En déduire qu'alors $\mathrm{Im}\, f^k = \mathrm{Im}\, f^{k+1}$.

**3)** Montrer que $\forall p \geq k,\ \mathrm{Ker}\, f^p = \mathrm{Ker}\, f^k$ et $\mathrm{Im}\, f^p = \mathrm{Im}\, f^k$.

**4) a)** Montrer que $\mathrm{Ker}\, f^k \cap \mathrm{Im}\, f^k = \{0_E\}$.

**b)** Établir que $\forall x \in E,\ f^k(x) \in \mathrm{Im}\, f^{2k}$. En déduire que :

$$\forall x \in E,\ \exists z \in \mathrm{Ker}\, f^k,\ \exists y \in E\ /\ x = f^k(y) + z.$$

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

**c)** Retrouver ce résultat à partir de **a)** en utilisant le résultat suivant :

si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces de $E$, alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

**5)** Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $A^4 = (0) \Longleftrightarrow A^3 = (0)$.


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

# CORRIGE DE L'EXERCICE

## CORRIGE :

### QUESTION–1

**a)** Soit $p \in \mathbb{N}$ et $u \in E$.

$u \in \operatorname{Ker} f^p$ veut dire que $f^p(u) = 0_E$ ; or $f^{p+1}(u) = f(f^p(u)) = f(0_E) = 0_E$ (**par linéarité**), donc $u \in \operatorname{Ker} f^{p+1}$ ; cela montre que

$$\boxed{\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{p+1}.}$$

On applique cela pour $p = 0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ et on obtient le résultat.

***Remarque*** : Pour $p = 0$, $f^0 = \mathrm{Id}$ et $\operatorname{Ker} f^0 = \{0_E\}$.

La démonstration précédente, appliquée à $p = 0$, donne le résultat suivant :

$\operatorname{Ker} f^0 \subset \operatorname{Ker} f$, ce qui veut dire $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker} f$.

Même si elle n'apporte pas grand chose de nouveau, cette dernière inclusion est vraie car elle veut dire que $0_E \in \operatorname{Ker} f$.

**b)**

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $v \in E$. $v \in \operatorname{Im} f^{p+1}$ veut dire qu'il existe un vecteur $u \in E$ / $v = f^{p+1}(u)$ ; or $f^{p+1}(u) = f^p(f(u))$. Posons $t = f(u)$, alors $t \in E$ et $v = f^p(t)$ : cela prouve que $v \in \operatorname{Im} f^p$. Donc

$$\boxed{\operatorname{Im} f^{p+1} \subset \operatorname{Im} f^p.}$$

***Remarque*** : Pour $p = 0$, $\operatorname{Im} f^0 = \operatorname{Im} \mathrm{Id} = E$. On obtient alors :

$\operatorname{Im} f \subset E$, ce qui est vrai car $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

On applique cela pour $p = 0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ et on obtient le résultat.

**En résumé :** pour tout entier $k$ dans $\mathbb{N}$, on a

$$\operatorname{Ker} f^0 \subset \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f^3 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1} \subset \ldots$$

$$\operatorname{Im} f^0 \supset \operatorname{Im} f \supset \operatorname{Im} f^2 \supset \operatorname{Im} f^3 \supset \ldots \supset \operatorname{Im} f^k \supset \operatorname{Im} f^{k+1} \supset \ldots$$

### QUESTION–2

- Occupons-nous des noyaux.

L'inclusion précédente implique l'inégalité $\dim \operatorname{Ker} f^k \leq \dim \operatorname{Ker} f^{k+1}$.

Posons $u_k = \dim \operatorname{Ker} f^k$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \in [\![0, n]\!]$ (car $\operatorname{Ker} f^k \subset E$).

Remarquons que $u_0 = \dim \operatorname{Ker} f^0 = \dim\{0_E\} = 0$.

On a donc $0 = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots u_n \leq u_{n+1} \leq n$.

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots u_n \leq u_{n+1} \leq n.$$

Les $n + 2$ entiers $u_0, u_1, \ldots u_{n+1}$ sont dans l'intervalle $[\![0, n]\!]$ (intervalle qui contient $n + 1$ entiers distincts), donc **nécessairement** deux d'entre eux au moins sont égaux ; ce qui se formule :


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.