



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### PROBABILITÉS DISCRETES

#### ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ :

#### ÉNONCÉ-24

On lance  $2n$  fois ( $n \geq 1$ ) une pièce de monnaie équilibrée.

1) Soit  $p_n$  la probabilité d'obtenir autant de piles aux rangs pairs que de faces aux rangs impairs. Montrer que

$$p_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

2) Montrer que  $p_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$ .

3) a) Montrer que la série de terme général  $\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$  est divergente ; en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln p_n = -\infty$ .

b) Déterminer la limite de  $p_n$ .

4) a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n}.$$

b) En déduire que la série de terme général  $p_n$  est divergente.

## INDICATIONS DE SOLUTION

**Question 4–a)** Raisonner par récurrence ; exprimer  $\binom{2n+2}{n+1}$  en fonction de  $\binom{2n}{n}$