



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



PROBABILITÉS DISCRETES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ :

ÉNONCÉ-24

On lance $2n$ fois ($n \geq 1$) une pièce de monnaie équilibrée.

1) Soit p_n la probabilité d'obtenir autant de piles aux rangs pairs que de faces aux rangs impairs. Montrer que

$$p_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

2) Montrer que $p_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$.

3) a) Montrer que la série de terme général $\ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ est divergente ; en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln p_n = -\infty$.

b) Déterminer la limite de p_n .

4) a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n}.$$

b) En déduire que la série de terme général p_n est divergente.

INDICATIONS DE SOLUTION

Question 4–a) Raisonner par récurrence ; exprimer $\binom{2n+2}{n+1}$ en fonction de $\binom{2n}{n}$