



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### PROBABILITES DISCRETES

#### ENONCE DE L'EXERCICE

#### ENONCE :

##### ENONCE-22

Une urne contient  $n_1$  boules blanches,  $n_2$  boules noires et  $r$  boules rouges (les boules sont indiscernables au toucher).  $n_1$  et  $n_2$  sont fixés dans tout l'exercice et  $n = n_1 + n_2$  est strictement positif.

Un joueur tire au hasard une boule de l'urne : si elle est blanche, il a gagné la partie ; si elle est noire, il a perdu ; si elle est rouge, il ne la remet pas dans l'urne et fait un second tirage. La même règle s'applique aux tirages suivants (s'ils existent !). La partie s'arrête lorsque le joueur a gagné ou perdu.

1) Quel est le nombre maximal de tirages pour une partie ?

2) Pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , on note  $G_r$  l'événement suivant :

« le joueur gagne sachant qu'il effectue ses tirages dans une urne qui contient initialement  $r$  boules rouges » et l'on note  $\pi_r$  sa probabilité.

a) Calculer  $\pi_0$  et  $\pi_1$ .

b) Etablir une relation de récurrence de la forme

$\pi_r = a\pi_{r-1} + b$  entre  $\pi_r$  et  $\pi_{r-1}$  ( $r \in \mathbb{N}^*$ ),  $a$  et  $b$  étant des fonctions de  $n_1, n_2$  et  $r$ .

c) En déduire l'expression de  $\pi_r$  pour tout  $r \in \mathbb{N}$ .

3) Soit  $X_r$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie se termine lorsqu'au départ il y a  $r$  boules rouges dans l'urne.

On note  $m_r = E(X_r)$  et  $p_r(k) = p(X_r = k)$ , où  $E(X_r)$  désigne l'espérance de  $X_r$ .

a) Trouver une relation entre  $p_{r-1}(k-1)$  et  $p_r(k)$  pour  $r \geq 1$  et  $k \geq 2$ .

b) Exprimer  $m_0, m_1, m_2$  en fonction de  $n$ .

c) Etablir une relation de récurrence de la forme

$m_r = c.m_{r-1} + d$  entre  $m_r$  et  $m_{r-1}$  ( $r \in \mathbb{N}^*$ ),  $c$  et  $d$  étant des fonctions de  $n$  et de  $r$

d) En déduire l'expression de  $m_r$  en fonction de  $n$  et de  $r$ .

## INDICATIONS DE SOLUTION

**Question 2–b)** Utiliser le système complet d'événements  $\{B_1, N_1, R_1\}$  pour trouver une relation entre  $G_r$  et  $G_{r-1}$ .

**Question 3–c)** Utiliser la relation du **a)** en n'oubliant pas qu'elle est valable pour  $k \geq 2$ .