



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



ALGÈBRE LINÉAIRE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ :

ÉNONCÉ-29

Soit $E = \mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère l'endomorphisme f de

E dont la matrice dans \mathcal{B} est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier $p \geq 1$, la dimension de

$E_p = \text{vect}(e_1, f(e_1), \dots, f^p(e_1))$.

2) a) Montrer que $\text{Ker } f^2$ et $\text{Ker}(f^2 - f - \text{Id})$ sont supplémentaires dans E .

b) Montrer qu'ils sont stables par f .

3) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

INDICATIONS DE SOLUTION

Pour la question **3)** Procéder par analyse synthèse :
supposer qu'il existe une base (v_1, v_2, v_3, v_4) de \mathbb{R}^4 dans laquelle la matrice de f est B et déterminer v_1 et v_2 , puis v_3 et v_4 .