



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-28

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 2$. Soit un réel a non nul donné. On admettra le résultat suivant :

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E ,

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G). \quad (*)$$

On considère un endomorphisme f de E vérifiant les propriétés suivantes :

- $f^{n-1} \neq 0$.
- $f^{n-1} \circ (f - a \text{Id}) = 0$.
- $f^{n-2} \circ (f - a \text{Id}) \neq 0$.

1) Montrer que 0 et a sont les seules valeurs propres de f .

2) a) Montrer que pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$\text{Ker } f^k \cap \text{Ker}(f - a \text{Id}) = \{0\}.$$

b) Comparer $\text{Im}(f - a \text{Id})$ et $\text{Ker } f^{n-1}$.

En déduire que $\dim \text{Im}(f - a \text{Id}) \leq \dim \text{Ker } f^{n-1}$, puis

$$n \leq \dim \text{Ker}(f - a \text{Id}) + \dim \text{Ker } f^{n-1}.$$

c) En utilisant la relation (*), montrer que

$$\dim \left(\text{Ker } f^{n-1} + \text{Im}(f - a \text{Id}) \right) \geq n.$$

En déduire que $\text{Ker } f^{n-1}$ et $\text{Ker}(f - a \text{Id})$ sont supplémentaires dans E .

3) Calculer $(f - a \text{Id}) \circ f^{n-1}$.

En déduire que $\text{Ker } f^{n-1}$ et $\text{Im } f^{n-1}$ sont supplémentaires dans E .