ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−26

Soit φ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de E est $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ. On notera D et D_1 les sous-espaces propres associés aux valeurs propres λ et λ_1 avec $\lambda > \lambda_1$.

2) Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3) On rappelle qu'un sous-espace G est stable par un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\forall x \in G,\ f(x) \in G$.

a) Soit Δ une droite vectorielle (sous-espace de dimension 1) et e une base de Δ. Montrer que Δ est stable par φ si et seulement si $\varphi(e)$ appartient à Δ.

b) En déduire que les seules droites Δ stables par φ sont D et D_1.

4) On pose $i = (10, 15, 4),\ j = (1, 1, 1)$ et $k = (0, -\frac{1}{6}, 0)$.

a) Vérifier que la famille (i, j, k) est une base de E que l'on notera $\mathcal{B}_1$.

Soit $v = ai + bj + ck$ un vecteur de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (j, v) soit une famille libre de E.

b) On considère alors le plan vectoriel $P = \mathrm{vect}(j, v)$ (on rappelle qu'un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension deux).

Montrer que $\varphi(v) \in P \iff a = 0$ ou $c = 0$.

c) En déduire que

$$\varphi(v) \in P \iff v = \underbrace{(a, b, 0)}_{v_1} \quad \text{ou} \quad v = \underbrace{(0, b, c)}_{v_2}.$$

d) Montrer alors que les seuls plans vectoriels $P = \mathrm{vect}(j, v)$ stables par φ sont $P_1 = \mathrm{vect}(i, j)$ et $P_2 = \mathrm{vect}(j, k)$.

5) Vérifier que l'un de ces plans est $\mathrm{Ker}(\varphi - 5\,\mathrm{Id})^2$; on le notera F.

6) a) Montrer que l'intersection de deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ n'est jamais égale à $\{0\}$.

b) Soit Q un plan stable par φ. Que peut-on dire de $Q \cap F$? En déduire tous les plans qui sont stables par φ.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

INDICATIONS DE SOLUTION