



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### ALGEBRE LINEAIRE

### ENONCE DE L'EXERCICE

#### ENONCE :

#### ENONCE-26

Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $E$  est  $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ .

1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $\varphi$ . On notera  $D$  et  $D_1$  les sous-espaces propres associés aux valeurs propres  $\lambda$  et  $\lambda_1$  avec  $\lambda > \lambda_1$ .

2) Montrer que  $A$  est semblable à  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

3) On rappelle qu'un sous-espace  $G$  est stable par un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si  $\forall x \in G, f(x) \in G$ .

a) Soit  $\Delta$  une droite vectorielle (sous-espace de dimension 1) et  $e$  une base de  $\Delta$ . Montrer que  $\Delta$  est stable par  $\varphi$  si et seulement si  $\varphi(e)$  appartient à  $\Delta$ .

b) En déduire que les seules droites  $\Delta$  stables par  $\varphi$  sont  $D$  et  $D_1$ .

4) On pose  $i = (10, 15, 4)$ ,  $j = (1, 1, 1)$  et  $k = (0, -\frac{1}{6}, 0)$ .

a) Vérifier que la famille  $(i, j, k)$  est une base de  $E$  que l'on notera  $\mathcal{B}_1$ .

Soit  $v = ai + bj + ck$  un vecteur de  $E$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $(j, v)$  soit une famille libre de  $E$ .

b) On considère alors le plan vectoriel  $P = \text{vect}(j, v)$  (on rappelle qu'un plan vectoriel est un espace vectoriel de dimension deux).

Montrer que  $\varphi(v) \in P \iff a = 0$  ou  $c = 0$ .

c) En déduire que

$$\varphi(v) \in P \iff v = \underbrace{(a, b, 0)}_{v_1} \text{ ou } v = \underbrace{(0, b, c)}_{v_2}.$$

d) Montrer alors que les seuls plans vectoriels  $P = \text{vect}(j, v)$  stables par  $\varphi$  sont  $P_1 = \text{vect}(i, j)$  et  $P_2 = \text{vect}(j, k)$ .

5) Vérifier que l'un de ces plans est  $\text{Ker}(\varphi - 5 \text{Id})^2$  ; on le notera  $F$ .

6) a) Montrer que l'intersection de deux plans vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  n'est jamais égale à  $\{0\}$ .

b) Soit  $Q$  un plan stable par  $\varphi$ . Que peut-on dire de  $Q \cap F$  ? En déduire tous les plans qui sont stables par  $\varphi$ .

## INDICATIONS DE SOLUTION