ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–24

Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^n pour tout entier naturel n.

2) On définit une suite $(X_n) \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ par :

$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix}$, les suites $(x_n), (y_n), (z_n)$ et (t_n) vérifiant les relations suivantes :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \geq 0, \quad \begin{cases} x_{n+1} &= \frac{1}{3}(y_n + z_n + t_n) \\ y_{n+1} &= \frac{1}{3}(x_n + z_n + t_n) \\ z_{n+1} &= \frac{1}{3}(x_n + y_n + t_n) \\ t_{n+1} &= \frac{1}{3}(x_n + y_n + z_n). \end{cases}$$

a) Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \geq 1,\ X_n = BX_{n-1}$.

b) Étudier la convergence de la suite (X_n), c'est-à-dire la convergence de chacun de ses termes.

3) Calculer B^2, puis montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout n, on ait :

$$B^n = a_n B + b_n I.$$

Déterminer ces suites et retrouver les résultats de la question précédente.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.