ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−24

Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^n pour tout entier naturel n.

2) On définit une suite $(X_n) \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ par :

$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix}$, les suites $(x_n), (y_n), (z_n)$ et (t_n) vérifiant les relations suivantes :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et } \forall n \geq 0, \quad \begin{cases} x_{n+1} & = & \frac{1}{3}(y_n + z_n + t_n) \\ y_{n+1} & = & \frac{1}{3}(x_n + z_n + t_n) \\ z_{n+1} & = & \frac{1}{3}(x_n + y_n + t_n) \\ t_{n+1} & = & \frac{1}{3}(x_n + y_n + z_n). \end{cases}$$

a) Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \geq 1,\ X_n = BX_{n-1}$.

b) Étudier la convergence de la suite (X_n), c'est-à-dire la convergence de chacun de ses termes.

3) Calculer B^2, puis montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout n, on ait :

$$B^n = a_n B + b_n I.$$

Déterminer ces suites et retrouver les résultats de la question précédente.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE