



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-24

Soit A la matrice carrée d'ordre 4 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer A^n pour tout entier naturel n .
- 2) On définit une suite $(X_n) \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ par :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix}$, les suites (x_n) , (y_n) , (z_n) et (t_n) vérifiant les relations suivantes :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \geq 0, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}(y_n + z_n + t_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + z_n + t_n) \\ z_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + y_n + t_n) \\ t_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + y_n + z_n). \end{cases}$$

- a) Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \geq 1$, $X_n = BX_{n-1}$.
- b) Étudier la convergence de la suite (X_n) , c'est-à-dire la convergence de chacun de ses termes.
- 3) Calculer B^2 , puis montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout n , on ait : $B^n = a_n B + b_n I$.

Déterminer ces suites et retrouver les résultats de la question précédente.