ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−23

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme u de E, qui a pour matrice A dans la base B.

1) a) l'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

b) Déterminer 3 réels α, β, γ tels que : $A^3 + \alpha A^2 + \beta A + \gamma I = (0)$ (où I est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et (0) la matrice nulle) .

2) On pose $F = \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$ (Id est l'application identique de E).

a) Quelles sont les dimensions de F et de G ?

b) Montrer que F et G sont supplémentaires.

c) En déduire que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE