



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### ALGEBRE LINEAIRE

### ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

#### ENONCE-23

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , et  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base

$B = (e_1, e_2, e_3)$ . On considère l'endomorphisme  $u$  de  $E$ , qui a pour matrice  $A$  dans la base  $B$ .

- 1) a) l'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?
- b) Déterminer 3 réels  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que :  $A^3 + \alpha A^2 + \beta A + \gamma I = (0)$  (où  $I$  est la matrice unité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $(0)$  la matrice nulle) .
- 2) On pose  $F = \text{Ker}(u - 2\text{Id})$  et  $G = \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$  ( $\text{Id}$  est l'application identique de  $E$ ).
- a) Quelles sont les dimensions de  $F$  et de  $G$  ?
- b) Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.
- c) En déduire que  $A$  est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$