ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−22

Soit E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -id_E$.

1) Montrer que f est un automorphisme de E.

2) Soit $p \in [\![2, +\infty[\![$. On considère une famille de p vecteurs de E, $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$. On suppose que la famille $(e_1, \ldots, e_p, f(e_1), \ldots, f(e_{p-1}))$ est libre.

a) Montrer que la famille $f(e_1), \ldots, f(e_{p-1}), f(e_p))$ est libre.

b) Montrer qu'alors la famille $(e_1, \ldots, e_p, f(e_1), \ldots, f(e_{p-1}), f(e_p))$ est libre.

Ind : on pourra considérer une combinaison linéaire nulle des vecteurs $e_1, \ldots, e_p, f(e_1), \ldots, f(e_{p-1}), f(e_p)$ et envisager le cas où le coefficient de $f(e_p)$ est nul, puis celui où il est non nul.

3) On suppose ici que la dimension de E vaut 6.

a) Montrer qu'il existe un entier $p > 0$ et p vecteurs $(e_1, \ldots, e_p)$ de E tels que la famille $(e_1, \ldots, e_p, f(e_1), \ldots, f(e_p))$ soit une base de E, notée B.

b) Quelle est la matrice M de f dans cette base B ?

c) Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = -I_6$.

INDICATIONS DE SOLUTION

Dans la question **2−b)**, dans le cas où le coefficient b_p de $f(e_p)$ est non nul, appliquer f à la combinaison linéaire, puis faire disparaître e_p de cette dernière équation .