ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−22

Soit E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -id_E$.

1) Montrer que f est un automorphisme de E.

2) Soit $p \in [\![2, +\infty[\![$. On considère une famille de p vecteurs de E, $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$. On suppose que la famille $(e_1, \ldots, e_p, f(e_1), \ldots, f(e_{p-1}))$ est libre.

a) Montrer que la famille $f(e_1), \ldots, f(e_{p-1}), f(e_p))$ est libre.

b) Montrer qu'alors la famille $(e_1, \ldots, e_p, f(e_1), \ldots, f(e_{p-1}), f(e_p))$ est libre.

Ind : on pourra considérer une combinaison linéaire nulle des vecteurs $e_1, \ldots, e_p, f(e_1), \ldots, f(e_{p-1}), f(e_p)$ et envisager le cas où le coefficient de $f(e_p)$ est nul, puis celui où il est non nul.

3) On suppose ici que la dimension de E vaut 6.

a) Montrer qu'il existe un entier $p > 0$ et p vecteurs $(e_1, \ldots, e_p)$ de E tels que la famille $(e_1, \ldots, e_p, f(e_1), \ldots, f(e_p))$ soit une base de E, notée B.

b) Quelle est la matrice M de f dans cette base B ?

c) Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = -I_6$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

INDICATIONS DE SOLUTION

Dans la question **2−b)**, dans le cas où le coefficient b_p de $f(e_p)$ est non nul, appliquer f à la combinaison linéaire, puis faire disparaître e_p de cette dernière équation .

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.