



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### ALGÈBRE LINÉAIRE

### ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

#### ÉNONCÉ :

##### ÉNONCÉ-21

Soit  $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1) Pour  $(i, j) \in (\llbracket 1, 3 \rrbracket)^2$ , on considère la matrice  $E_{i,j} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  dont les termes sont tous nuls, sauf celui de la  $i^{\text{ème}}$  ligne  $j^{\text{ème}}$  colonne qui vaut 1.

Montrer que la famille  $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}$  forme une base de  $E$ , appelée base canonique et notée  $\mathcal{B}$ .

2) Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

On considère l'application  $f_A : \begin{cases} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto XA. \end{cases}$

a) Vérifier que  $f_A \in \mathcal{L}(E)$  et déterminer sa matrice  $M$  dans  $\mathcal{B}$ .

b) Calculer la trace de  $M$  ( la trace d'une matrice carrée est la somme de ses termes diagonaux).

On rappelle que la trace d'une matrice est indépendante de la base dans laquelle on écrit cette matrice : c'est la raison pour laquelle on dira aussi trace de l'endomorphisme associé et on la notera  $\text{tr } M$  ou  $\text{tr } f_A$ .

3) Soit  $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $g_C : \begin{cases} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto XC. \end{cases}$

a) Montrer que, si  $C$  est  $p$ -nilpotente (c'est-à-dire il existe  $p \in \mathbb{N}^* / C^p = (0)$ ), il en est de même de  $g_C$  (c'est-à-dire  $\underbrace{g_C \circ \dots \circ g_C}_{p \text{ fois}} = \omega$  où  $\omega$  est

l'endomorphisme nul).

b) Déterminer la trace de  $g_C$ .