ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−21

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1) Pour $(i,j) \in ([\![1,3]\!])^2$, on considère la matrice $E_{i,j} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les termes sont tous nuls, sauf celui de la i^{eme} ligne j^{eme} colonne qui vaut 1.

Montrer que la famille $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}$ forme une base de E, appelée base canonique et notée $\mathcal{B}$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On considère l'application $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & XA. \end{array} \right.$

a) Vérifier que $f_A \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer sa matrice M dans $\mathcal{B}$.

b) Calculer la trace de M (la trace d'une matrice carrée est la somme de ses termes diagonaux).

On rappelle que la trace d'une matrice est indépendante de la base dans laquelle on écrit cette matrice : c'est la raison pour laquelle on dira aussi trace de l'endomorphisme associé et on la notera $\operatorname{tr} M$ ou $\operatorname{tr} f_A$.

3) Soit $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $g_C : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & XC. \end{array} \right.$

a) Montrer que, si C est p-nilpotente (c'est-à-dire il existe $p \in \mathbb{N}^* \ / \ C^p = (0)$) , il en est de même de g_C (c'est-à-dire $\underbrace{g_C \circ \cdots \circ g_C}_{\text{p fois}} = \omega$ où ω est l'endomorphisme nul).

b) Déterminer la trace de g_C.