ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−20

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle trace de A le nombre $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1) a) Montrer que

$$\forall (A,B) \in \Big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\Big)^2,\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA),\ \mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) \text{ et}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A).$$

b) En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

2) On suppose $n = 2$. Soit $(u,v) \in \big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)\big)^2$ vérifiant :

$$u \circ v - v \circ u = u. \qquad (*)$$

a) Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}\ /\ u \circ u = \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$; établir que $\lambda = 0$.

b) On suppose de plus que $u \neq 0$. Montrer que :

— $\dim \mathrm{Ker}\, u = 1$.

— $\mathrm{Ker}\, u$ est stable par v.

— v admet au moins une valeur propre réelle.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE