ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−20

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle trace de A le nombre $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1) a) Montrer que

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2,\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA),\ \mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) \text{ et}$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{tr}(A).$$

b) En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

2) On suppose $n = 2$. Soit $(u,v) \in \left(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)\right)^2$ vérifiant :

$$u \circ v - v \circ u = u. \qquad (*)$$

a) Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}\ /\ u \circ u = \lambda\, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$; établir que $\lambda = 0$.

b) On suppose de plus que $u \neq 0$. Montrer que :

— $\dim \mathrm{Ker}\, u = 1$.

— $\mathrm{Ker}\, u$ est stable par v.

— v admet au moins une valeur propre réelle.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.