



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ALGÈBRE LINÉAIRE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ :

ÉNONCÉ-20

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle trace de A le nombre $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

1) a) Montrer que

$$\forall (A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \text{ et} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A).$$

b) En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

2) On suppose $n = 2$. Soit $(u, v) \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}^2))^2$ vérifiant :

$$u \circ v - v \circ u = u. \quad (*)$$

a) Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R} / u \circ u = \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$; établir que $\lambda = 0$.

b) On suppose de plus que $u \neq 0$. Montrer que :

- $\dim \text{Ker } u = 1$.
- $\text{Ker } u$ est stable par v .
- v admet au moins une valeur propre réelle.