ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−18

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On note $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & b & b & a \end{pmatrix}.$$

On note u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ représenté par A dans la base canonique : (e_1, e_2, e_2, e_4).

1) Dans cette question, il s'agit de déterminer, selon (a, b), $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$; en donner leurs dimensions, en fonction de a et b.

a) Etudier le cas $a = b = 0$.

b) Soit $a = 0$ et $b \neq 0$. Montrer que

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(e_1 + e_4) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} u = \operatorname{vect}(e_1, e_4, e_2 - e_3).$$

c) Soit $a \neq 0$ et $b = 0$. Montrer que

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} u = \operatorname{vect}(e_1 - e_4, e_2, e_3).$$

d) Soit $ab \neq 0$. Montrer que

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_4) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} u = \operatorname{vect}(e_1 - e_4, e_2 - e_3).$$

2) $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont-ils supplémentaires ? discuter selon (a, b).

3) Dans cette question il s'agit de déterminer les valeurs propres de u.

a) Etudier le cas $a = b = 0$.

b) Soit $a = 0$ et $b \neq 0$. Comparer $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$; en déduire la seule valeur propre de u.

c) Soit $a \neq 0$ et $b = 0$. Calculer $u(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ et déterminer les valeurs propres de u.

d) Soit $ab \neq 0$.

- Montrer que $\lambda \neq 0$ est valeur propre de u si et seulement si

$$-\lambda^2 + 2a\lambda + 4ab = 0.$$

- En déduire, selon (a, b) les valeurs propres de u.

4) Dans cette question il s'agit d'étudier la diagonalisation de u.

a) Répondre à la question dans les trois premiers cas.

b) Soit $ab \neq 0$.

- Montrer que si $a = -4b$, u n'est pas diagonalisable.
- Soit $a(a + 4b) > 0$. Montrer (sans les calculer) que les deux sous-espaces propres associés aux deux valeurs propres non nulles sont de dimension 1.

En déduire que u est diagonalisable.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

QUESTION−1

Rappelons que, dans tous les cas, $\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(u(e_1), \dots, u(e_4))$.

Dans le cas présent : $\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(a(e_1 + \dots + e_4), b(e_1 + e_4))$.

a) $\boxed{a = b = 0.}$

Alors u est l'endomorphisme nul, donc

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Dans le cas où } a = b = 0 : \\ \operatorname{Im} u = \{0_E\},\ \operatorname{Ker} u = E \ ;\ \dim \operatorname{Im} u = 0 \text{ et} \\ \dim \operatorname{Ker} u = 4.\end{array}}$$

b) $\boxed{a = 0,\ b \neq 0.}$

Alors $A = \begin{pmatrix} 0 & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(b(e_1 + e_4)) = \operatorname{vect}(e_1 + e_4)$, car $b \neq 0$. La dimension de $\operatorname{Im} u = 1$.

Le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker} u = 3$. Pour déterminer $\operatorname{Ker} u$, il suffit d'y trouver une famille libre de trois vecteurs.

Il est à peu près clair, en regardant bien la matrice A que :

$u(e_1) = u(e_4) = 0$. De plus, $u(e_2) = u(e_3)$, donc $u(e_2 - e_3) = 0$.

La famille $(e_1, e_4, e_2 - e_3)$ est une famille de $\operatorname{Ker} u$. Regardons si elle est libre.

$$\text{Considérons } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ xe_1 + ye_4 + z(e_2 - e_3) = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

La relation **(1)** équivaut à : $xe_1 + ze_2 - ze_3 + ye_4 = 0$.

Comme $(e_1, \dots, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, cela impose $x = y = z = 0$.

Conclusion : La famille $(e_1, e_4, e_2 - e_3)$ **est une base de** $\operatorname{Ker} u$**, car c'est une famille libre de trois vecteurs d'un espace de dimension trois.**

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Dans le cas où } a = 0 \text{ et } b \neq 0 : \\ \operatorname{Im} u = \operatorname{vect}(e_1 + e_4),\ \dim \operatorname{Im} u = 1 \text{ et} \\ \operatorname{Ker} u = \operatorname{vect}(e_1, e_4, e_2 - e_3) \text{ et } \dim \operatorname{Ker} u = 3.\end{array}}$$

c) $\boxed{a \neq 0,\ b = 0.}$

Alors $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.