



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### ALGÈBRE LINÉAIRE

### ENONCE DE L'EXERCICE

#### ENONCE :

#### ENONCE-17

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit l'application  $\varphi$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$  par :

$$\forall P \in E, \varphi(P) = Q / \forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = P(x+1) - P(x).$$

On notera  $\Theta$  le polynôme nul.

- 1)  $\varphi$  est-il un automorphisme de  $E$  ?
- 2) Pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on définit le polynôme  $P_k$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$$

et on pose  $\forall x \in \mathbb{R}, P_0(x) = 1$ , et  $P_1(x) = x$ .

- a) Montrer que la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base de  $E$ .
- b) Ecrire la matrice de  $\varphi$  dans cette base.
- c) Montrer que :

$$\forall P \in E, P = \sum_{k=0}^n (\varphi^k(P))(0) P_k, \quad \text{où } \varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{k \text{ fois}}.$$

- d) L'endomorphisme  $\varphi$  est-il diagonalisable ?