ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $A^p = (0)$ et $A^{p-1} \neq (0)$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A.

0) a) Montrer que :

a) $\text{Ker } f^0 \subset \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2 \subset \ldots \text{Ker } f^n \subset \text{Ker } f^{n+1} \ldots$

b) Montrer, on considérant les dimensions de $\text{Ker } f^p$ pour $p \in [\![0, n]\!]$, qu'il existe un entier $0 \leq k \leq n$ tel que $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k+1}$.

1) Montrer que $p \leq n \Longrightarrow A^n = (0)$.

2) Revenons au cas général.

a) Montrer qu'il existe un vecteur non nul e tel que $f^{p-1}(e) \neq 0$.

b) En déduire que la famille $(e, f(e), \ldots, f^{p-1}(e))$ est une famille libre de E.

c) Conclure que $A^n = (0)$.

3) On suppose dorénavant que $p = n - 1$.

a) En utilisant les résultats de la première question de l'exercice−10, déduire que :

$$1 \leq \dim \text{Ker } f \leq \cdots \leq \dim \text{Ker } f^{n-1} \leq \dim \text{Ker } f^n \leq n - 1.$$

b) Montrer que

$$1 \leq \dim \text{Ker } f < \cdots < \dim \text{Ker } f^{n-1} \leq n - 1.$$

c) Conclure que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \dim \text{Ker } f^k = k.$$

4) Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \text{Im } f^k \subset \text{Ker } f^{n-k}$.

En déduire que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \text{Im } f^k = \text{Ker } f^{n-k}$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.