



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ALGÈBRE LINÉAIRE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ :

ÉNONCÉ-16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $A^p = (0)$ et $A^{p-1} \neq (0)$. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n est A .

0) a) Montrer que :

$$\text{a) } \text{Ker } f^0 \subset \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2 \subset \dots \subset \text{Ker } f^n \subset \text{Ker } f^{n+1} \dots$$

b) Montrer, en considérant les dimensions de $\text{Ker } f^p$ pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, qu'il existe un entier $0 \leq k \leq n$ tel que $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k+1}$.

1) Montrer que $p \leq n \implies A^n = (0)$.

2) Revenons au cas général.

a) Montrer qu'il existe un vecteur non nul e tel que $f^{p-1}(e) \neq 0$.

b) En déduire que la famille $(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e))$ est une famille libre de E .

c) Conclure que $A^n = (0)$.

3) On suppose dorénavant que $p = n - 1$.

a) En utilisant les résultats de la première question de l'exercice-10, déduire que :

$$1 \leq \dim \text{Ker } f \leq \dots \leq \dim \text{Ker } f^{n-1} \leq \dim \text{Ker } f^n \leq n - 1.$$

b) Montrer que

$$1 \leq \dim \text{Ker } f < \dots < \dim \text{Ker } f^{n-1} \leq n - 1.$$

c) Conclure que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \dim \text{Ker } f^k = k.$$

4) Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{Im } f^k \subset \text{Ker } f^{n-k}$.

En déduire que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{Im } f^k = \text{Ker } f^{n-k}$.