ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–14

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme nilpotent, c'est-à-dire tel qu'il existe un entier naturel $p \geq 2$ tel que :

$$u^p = \omega \quad \text{et} \quad u^{p-1} \neq \omega \quad \text{où } \omega \text{ est l'endomorphisme nul de } E.$$

1) Montrer que 0 est la seule valeur propre de u.

2) a) Montrer qu'il existe $a \in E$ / $u^{p-1}(a) \neq 0$.

b) Montrer que la famille$(a, u(a), \dots u^{p-1}(a))$ est libre.

3) Soit v l'endomorphisme de E défini par : $v = \mathrm{Id} + u + \dfrac{u^2}{2} + \dots + \dfrac{u^{p-1}}{(p-1)}$.

Montrer que v est un automorphisme de E.

(On pourra montrer que si $x \in \mathrm{Ker}\, v$, $u^{p-1}(x) = 0$, puis $u^{p-2}(x) = 0$, etc...).

4) a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id})$.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\, u$.

5) Déduire de la question précédente que 1 est la seule valeur propre de v.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.