



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### ALGÈBRE LINÉAIRE

### ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

#### ÉNONCÉ :

#### ÉNONCÉ-14

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n \geq 1$  et  $u$  un endomorphisme nilpotent, c'est-à-dire tel qu'il existe un entier naturel  $p \geq 2$  tel que :

$$u^p = \omega \quad \text{et} \quad u^{p-1} \neq \omega \quad \text{où } \omega \text{ est l'endomorphisme nul de } E.$$

- 1) Montrer que 0 est la seule valeur propre de  $u$ .
- 2) a) Montrer qu'il existe  $a \in E / u^{p-1}(a) \neq 0$ .  
b) Montrer que la famille  $(a, u(a), \dots, u^{p-1}(a))$  est libre.
- 3) Soit  $v$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :  $v = \text{Id} + u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^{p-1}}{(p-1)}$ .

Montrer que  $v$  est un automorphisme de  $E$ .

(On pourra montrer que si  $x \in \text{Ker } v$ ,  $u^{p-1}(x) = 0$ , puis  $u^{p-2}(x) = 0$ , etc...).

- 4) a) Montrer que  $\text{Ker } u \subset \text{Ker}(v - \text{Id})$ .  
b) Montrer que  $\text{Ker}(v - \text{Id}) \subset \text{Ker } u$ .
- 5) Dédurre de la question précédente que 1 est la seule valeur propre de  $v$ .