ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−11

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs propres de f et les vecteurs propres associés. A est-elle diagonalisable ?

On supposera dorénavant qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$, tel que $g^2 = f$.

2) Montrer que e_2 et e_3 sont des vecteurs propres de g (on pourra utiliser le fait que f et g commutent).

L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

3) En déduire que l'ensemble des valeurs propres de g est l'un des quatre ensembles $\{-2,-1\}$, $\{-2,1\}$, $\{2,-1\}$, $\{2,1\}$.

Quels sont les sous-espaces propres associés ?

4) Montrer qu'il existe $(a,b) \in \{-1,1\}^2$, tel que la matrice B de g dans la base canonique soit :

$$B = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ \frac{1}{4a} & 2a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

5) Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$.