ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–11

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs propres de f et les vecteurs propres associés. A est-elle diagonalisable ?

On supposera dorénavant qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$, tel que $g^2 = f$.

2) Montrer que e_2 et e_3 sont des vecteurs propres de g (on pourra utiliser le fait que f et g commutent).

L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

3) En déduire que l'ensemble des valeurs propres de g est l'un des quatre ensembles $\{-2,-1\}$, $\{-2,1\}$, $\{2,-1\}$, $\{2,1\}$.

Quels sont les sous-espaces propres associés ?

4) Montrer qu'il existe $(a,b) \in \{-1,1\}^2$, tel que la matrice B de g dans la base canonique soit :

$$B = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ \frac{1}{4a} & 2a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

5) Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.