



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ALGÈBRE LINÉAIRE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ :

ÉNONCÉ—8

On considère le sous-ensemble \mathcal{M} de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{M} = \left\{ A(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t & 0 \\ t & 1+t & 0 \\ t & -t & 1+2t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- 1) Montrer que \mathcal{M} est stable par produit matriciel.
- 2) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $A(t)$ est inversible.
- 3) On note $\mathcal{M}_1 = \left\{ A(t) \in \mathcal{M} / t \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right\}$.

Montrer que \mathcal{M}_1 est un groupe multiplicatif, c'est-à-dire :

$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_1)^2$, $AB \in \mathcal{M}_1$; la matrice unité est dans \mathcal{M}_1 ; $\forall A \in \mathcal{M}_1$, A est inversible et son inverse est dans \mathcal{M}_1 .

L'associativité n'est pas à montrer, elle est acquise.

- 4) Résoudre dans \mathcal{M} l'équation : $X^2 = A(1)$.
- 5) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $B = A(x_0)$. Calculer B^n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.

INDICATIONS DE SOLUTION