ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−6

E désigne un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = f \circ f \circ f = \omega$ et $f^2 = f \circ f \neq \omega$, où ω est l'endomorphisme nul. On note Id l'application identique de E.

1) Comparer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} f^2$, montrer que $\dim \operatorname{Ker} f^2 \neq 3$, puis montrer que $(\dim \operatorname{Ker} f = 2) \Longrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Montrer qu'alors $f^2 = \omega$.

En déduire les dimensions respectives de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

2) Soit $a \notin \operatorname{Ker} f^2$ (on justifiera l'existence d'un tel vecteur). Montrer que la famille $\mathcal{B} = (a, f(a), f^2(a))$ est une base de E. Déterminer la matrice M de f dans cette base. Que peut-on dire des dimensions de $\operatorname{Ker} f^2$ et de $\operatorname{Im} f^2$?

3) Déterminer les valeurs et vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4) Montrer que $\mathrm{Id} + f$ est un automorphisme de E et déterminer son automorphisme réciproque $(\mathrm{Id} + f)^{-1}$.

5) Dans cette question $E = \mathbb{R}_2[X]$ et D désigne l'application dérivation. Vérifier que l'on est bien dans les conditions initiales de l'exercice et déterminer $(\mathrm{Id} + D)^{-1}$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

INDICATIONS DE SOLUTION

1) on trouve $\dim \operatorname{Ker} f = 1$

2) on trouve $\dim \operatorname{Ker} f = 2$