



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



ALGÈBRE LINÉAIRE

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ :

ÉNONCÉ-5

Soit P la matrice d'ordre $n + 1$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -p_1 & \dots & \dots & -p_n \\ p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où les p_i sont des nombres réels.

1) On considère les vecteurs colonnes appartenant à $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système $Y = PX$ d'inconnues $x_0, x_1 \dots x_n$ réelles (On pourra poser $s = \sum_{k=1}^n p_k^2$).

2) En déduire que la matrice P est inversible et expliciter P^{-1} .

3) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de P . Cette matrice est-elle diagonalisable ?

INDICATIONS DE SOLUTION

1) On trouvera $x_0 = \frac{1}{1+s} \left(y_0 + \sum_{i=1}^n p_i y_i \right)$ et

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = y_k - \frac{1}{1+s} p_k \left(y_0 + \sum_{i=1}^n p_i y_i \right).$

3) On distinguera les cas $\lambda = 1$ et $\lambda \neq 1$

Le résultat est : une seule valeur propre .