ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–5

Soit P la matrice d'ordre $n+1$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -p_1 & \dots & \dots & -p_n \\ p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_n & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où les p_i sont des nombres réels.

1) On considère les vecteurs colonnes appartenant à $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système $Y = PX$ d'inconnues $x_0, x_1 \cdots x_n$ réelles (On pourra poser $s = \sum_{k=1}^{n} p_k^2$).

2) En déduire que la matrice P est inversible et expliciter P^{-1}.

3) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de P. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

INDICATIONS DE SOLUTION

1) On trouvera $x_0 = \dfrac{1}{1+s}\Big(y_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i y_i\Big)$ et

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = y_k - \dfrac{1}{1+s} p_k \Big(y_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i y_i\Big)$.

3) On distinguera les cas $\lambda = 1$ et $\lambda \neq 1$

Le résultat est : une seule valeur propre .