



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE-2

Partie-A

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par :

$$\forall P \in E, \varphi(P) = Q \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \frac{1}{2}(P(x+1) + P(x)).$$

- 1) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Donner la matrice M de φ dans la base canonique de E .
- 2) Etudier la diagonalisation de M .
- 3) Calculer $(M - I)^2$ et $(M - I)^3$ où I est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
En déduire l'expression de M^n en fonction de n , pour $n \in \mathbb{N}$.
- 4) M est-elle inversible ?

Partie-B

On suppose désormais que $E = \mathbb{R}[X]$, φ gardant la même signification.

- 1) Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\varphi(P_n)$ où P_n est le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = x^n.$$

- 3) Montrer que :
$$\begin{cases} \deg(P) = k, k \in \mathbb{N} \implies \deg(\varphi(P)) = k. \\ \varphi \text{ injectif} \\ \varphi \text{ bijectif.} \end{cases}$$

- 4) Soit C_n le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, C_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ et D_n son antécédent par φ .

- a) Montrer que $D_n' = D_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- b) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $P(x) = D_n(1-x)$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = \varphi(D_n)(-x)$.

- c) En conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi((-1)^n D_n) = \varphi(P)$.

Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, D_n(1-x) = (-1)^n D_n(x)$.

CORRIGE DE L'EXERCICE
CORRIGE :
Partie-A
QUESTION-1

$Q \in \mathbb{R}_2[X]$, car P et $x \mapsto P(x+1)$ sont dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $(P, P_1) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(P + \lambda P_1)(x) &= \frac{1}{2} \left(P(x+1) + \lambda P_1(x+1) + P(x) + \lambda P_1(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(P(x+1) + P(x) \right) + \lambda \frac{1}{2} \left(P_1(x+1) + P_1(x) \right) \\ &= \varphi(P)(x) + \lambda \varphi(P_1)(x) = (\varphi(P) + \lambda \varphi(P_1))(x) \end{aligned}$$

Ce qui veut dire $\varphi(P + \lambda P_1) = \varphi(P) + \lambda \varphi(P_1)$, soit φ est linéaire.

$\varphi \in \mathcal{L}(E).$

Matrice de φ dans la base canonique de E : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(P_0)(x) = \frac{1}{2}(P_0(x+1) + P_0(x)) = \frac{1}{2}(1+1) = P_0(x). \text{ Donc } \varphi(P_0) = P_0.$$

$$\varphi(P_1)(x) = \frac{1}{2}((x+1) + x) = x + \frac{1}{2} = P_1(x) + \frac{1}{2}P_0(x). \text{ Donc } \varphi(P_1) = P_1 + \frac{1}{2}P_0.$$

$$\varphi(P_2)(x) = \frac{1}{2}((x+1)^2 + x^2) = x^2 + x + \frac{1}{2} = P_2(x) + P_1(x) + \frac{1}{2}P_0(x). \text{ Donc}$$

$$\varphi(P_2) = P_2 + P_1 + \frac{1}{2}P_0.$$

La matrice M de φ dans la base canonique (P_0, P_1, P_2) est donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

QUESTION-2

La matrice M est triangulaire, sa seule valeur propre est $\lambda = 1$.

Raisonnons par l'absurde : Si M est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale, sur la diagonale de laquelle il y a la valeur propre 1 ; cette matrice diagonale est I . Il existe donc une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$, inversible, telle que $M = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

Comme $M \neq I_3$, on conclut que

 M n'est pas diagonalisable
QUESTION-3

$$(M - I) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (M - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (M - I)^3 = (0).$$