ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–2

Partie–A

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par :

$$\forall P \in E,\ \varphi(P) = Q \quad \text{tel que} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \frac{1}{2}(P(x+1) + P(x)).$$

1) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Donner la matrice M de φ dans la base canonique de E.

2) Etudier la diagonalisation de M.

3) Calculer $(M-I)^2$ et $(M-I)^3$ où I est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

En déduire l'expression de M^n en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.

4) M est-elle inversible ?

Partie–B

On suppose désormais que $E = \mathbb{R}[X]$, φ gardant la même signification.

1) Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\varphi(P_n)$ où P_n est le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = x^n.$$

3) Montrer que : $\begin{cases} deg(P) = k,\ k \in \mathbb{N} \Longrightarrow deg(\varphi(P)) = k. \\ \varphi \text{ injectif} \\ \varphi \text{ bijectif.} \end{cases}$

4) Soit C_n le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ C_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ et D_n son antécédent par φ.

a) Montrer que ${D_n}' = D_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $P(x) = D_n(1-x)$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(P)(x) = \varphi(D_n)(-x)$.

c) En conclure que $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi((-1)^n D_n = \varphi(P)$.

Déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ D_n(1-x) = (-1)^n D_n(x)$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

Partie–A

QUESTION–1

$Q \in \mathbb{R}_2[X]$, car P et $x \longmapsto P(x+1)$ sont dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $(P, P_1) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(P+\lambda P_1)(x) &= \frac{1}{2}\Big(P(x+1)+\lambda P_1(x+1)+P(x)+\lambda P_1(x)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(P(x+1)+P(x)\Big)+\lambda\frac{1}{2}\Big(P_1(x+1)+P_1(x)\Big)\\ &= \varphi(P)(x)+\lambda\varphi(P_1)(x) = (\varphi(P)+\lambda\varphi(P_1))(x)\end{aligned}$$

Ce qui veut dire $\varphi(P+\lambda P_1) = \varphi(P)+\lambda\varphi(P_1)$, soit φ est linéaire.

$\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Matrice de φ dans la base canonique de E : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\varphi(P_0)(x) = \frac{1}{2}(P_0(x+1)+P_0(x)) = \frac{1}{2}(1+1) = P_0(x)$. Donc $\varphi(P_0) = P_0$.

$\varphi(P_1)(x) = \frac{1}{2}((x+1)+x) = x+\frac{1}{2} = P_1(x)+\frac{1}{2}P_0(x)$. Donc $\varphi(P_1) = P_1+\frac{1}{2}P_0$.

$\varphi(P_2)(x) = \frac{1}{2}((x+1)^2+x^2) = x^2+x+\frac{1}{2} = P_2(x)+P_1(x)+\frac{1}{2}P_0(x)$. Donc

$\varphi(P_2) = P_2+P_1+\frac{1}{2}P_0$.

La matrice M de φ dans la base canonique (P_0, P_1, P_2) est donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

QUESTION–2

La matrice M est triangulaire, sa seule valeur propre est $\lambda = 1$.

Raisonnons par l'absurde : Si M est diagonalisable, elle est sembbable à une matrice diagonale, sur la diagonale de laquelle il y a la valeur propre 1 ; cette matrice diagonale est I. Il existe donc une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, telle que $M = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

Comme $M \neq I_3$, on conclut que

M n'est pas diagonalisable

QUESTION–3

$$(M-I) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ (M-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (M-I)^3 = (0).$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.