ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−2

Partie−A

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par :

$$\forall P \in E,\ \varphi(P) = Q \quad \text{tel que} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \frac{1}{2}(P(x+1) + P(x)).$$

1) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Donner la matrice M de φ dans la base canonique de E.

2) Etudier la diagonalisation de M.

3) Calculer $(M - I)^2$ et $(M - I)^3$ où I est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

En déduire l'expression de M^n en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.

4) M est-elle inversible ?

Partie−B

On suppose désormais que $E = \mathbb{R}[X]$, φ gardant la même signification.

1) Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\varphi(P_n)$ où P_n est le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = x^n.$$

3) Montrer que : $\begin{cases} deg(P) = k,\ k \in \mathbb{N} \Longrightarrow deg(\varphi(P)) = k. \\ \varphi \text{ injectif} \\ \varphi \text{ bijectif.} \end{cases}$

4) Soit C_n le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ C_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ et D_n son antécédent par φ.

a) Montrer que ${D_n}' = D_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $P(x) = D_n(1 - x)$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(P)(x) = \varphi(D_n)(-x)$.

c) En conclure que $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi((-1)^n D_n = \varphi(P)$.

Déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ D_n(1 - x) = (-1)^n D_n(x)$.

CORRIGE DE L'EXERCICE

CORRIGE :

Partie–A

QUESTION–1

$Q \in \mathbb{R}_2[X]$, car P et $x \longmapsto P(x+1)$ sont dans $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit $(P, P_1) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(P+\lambda P_1)(x) &= \frac{1}{2}\Big(P(x+1)+\lambda P_1(x+1)+P(x)+\lambda P_1(x)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(P(x+1)+P(x)\Big)+\lambda\frac{1}{2}\Big(P_1(x+1)+P_1(x)\Big)\\ &= \varphi(P)(x)+\lambda\varphi(P_1)(x) = (\varphi(P)+\lambda\varphi(P_1))(x)\end{aligned}$$

Ce qui veut dire $\varphi(P+\lambda P_1) = \varphi(P)+\lambda\varphi(P_1)$, soit φ est linéaire.

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(E).}$$

Matrice de φ dans la base canonique de E : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$\varphi(P_0)(x) = \frac{1}{2}(P_0(x+1)+P_0(x)) = \frac{1}{2}(1+1) = P_0(x)$. Donc $\varphi(P_0) = P_0$.

$\varphi(P_1)(x) = \frac{1}{2}((x+1)+x) = x+\frac{1}{2} = P_1(x)+\frac{1}{2}P_0(x)$. Donc $\varphi(P_1) = P_1+\frac{1}{2}P_0$.

$\varphi(P_2)(x) = \frac{1}{2}((x+1)^2+x^2) = x^2+x+\frac{1}{2} = P_2(x)+P_1(x)+\frac{1}{2}P_0(x)$. Donc

$\varphi(P_2) = P_2+P_1+\frac{1}{2}P_0$.

La matrice M de φ dans la base canonique (P_0, P_1, P_2) est donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

QUESTION–2

La matrice M est triangulaire, sa seule valeur propre est $\lambda = 1$.

Raisonnons par l'absurde : Si M est diagonalisable, elle est sembbable à une matrice diagonale, sur la diagonale de laquelle il y a la valeur propre 1 ; cette matrice diagonale est I. Il existe donc une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, telle que $M = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

Comme $M \neq I_3$, on conclut que

$$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

QUESTION–3

$$(M-I) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ (M-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } (M-I)^3 = (0).$$

